DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.10098

Editorial
INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 2, Jul - Dez 2021, p. 5 – 13

Encontro com o Cálculo Fracionário

Edmundo Capelas de Oliveira
Departamento de Matemática Aplicada
Imecc – Unicamp, 13083-859 Campinas, SP, Brasil
capelas@unicamp.br

Ao ingressar em uma Universidade, o estudante que procura a área de Ciências Exatas se depara com a disciplina Cálculo, logo no primeiro semestre. Aprende que tal disciplina vai acompanhá-lo até o final do curso e descobre a beleza e a quantidade de aplicações possíveis.

No cálculo o estudante vai aprender que o conceito de derivada, associado a uma razão (ou a uma inclinação), e o conceito de integral, associado a uma área, se fundem no famoso Teorema Fundamental do Cálculo. Ao concluir esta disciplina o estudante vai encontrar duas outras que, em princípio, devem formar a base para adentrar em outras metodologias, por exemplo, as várias transformadas integrais e suas aplicações.

Sendo assim, vale destacar, primeiro as equações diferenciais, pois devido ao amplo espectro de aplicações, é um divisor de águas para aqueles estudantes que vão enfrentar uma disciplina de análise mais direcionada aos estudantes de Matemática, Matemática Aplicada e Física, pois os demais não têm esta exigência na grade curricular.

Por outro lado, a disciplina de Variáveis Complexas (ou Funções Analíticas) proporciona ao estudante, dentre outros, uma maneira elegante de recuperar resultados, em particular envolvendo integrais reais calculadas por meio do plano complexo, bem como o poderoso Teorema dos Resíduos com sua marcante importância no cálculo das transformadas inversas.

Em geral este material, cálculo, equações diferenciais e funções analíticas, é coberto nos quatro primeiros semestres, ou seja, dois anos de um curso com quatro ou cinco anos de duração. Acredita-se que o que vem pela pela frente faz parte de um possível complemento de sua formação dependendo da particular escolha do curso.

Costuma ser na disciplina de Cálculo que várias perguntas, elaboradas por estudantes do Ensino Médio, são compreendidas de forma completa, por exemplo: Para que serve isto? Onde eu vou usar isto? Pois, em geral, após o conceito de limite, estas perguntas podem ser discutidas com mais propriedade. Vale ressaltar que o conceito de derivada poderia ser introduzido no Ensino Médio, imediatamente após o conceito de Função, por exemplo, como uma taxa de crescimento/decrescimento de uma população, algo palatável para o estudante desse período.

Voltemos ao Ensino Superior, precisamente nos cursos de exatas, onde a disciplina Cálculo se faz presente desde o início do curso. Uma pergunta é frequente: Por que não há uma derivada de ordem não inteira, uma derivada de ordem meio, por exemplo? Vale mencionar esse tipo de questionamento por parte do estudante, pois emerge naturalmente quando discutimos uma equação integral de Abel por meio da transformada de Laplace e que, para muitos pesquisadores, resulta na primeira aplicação do chamado cálculo de ordem arbitrária, ou cálculo de ordem não inteira, cunhado popularmente de Cálculo Fracionário.

No cálculo de ordem não inteira emerge naturalmente o problema da não localidade. Enquanto no cálculo de ordem inteira, conforme proposto independentemente por Newton e Leibniz, a derivada é calculada num ponto, a derivada de ordem não inteira carrega consigo todo o passado, em particular, dizemos que contém o termo de memória, isto é, um problema não local. A não localidade é uma característica do cálculo de ordem não inteira e, sem ela, a derivada não passa de um múltiplo de uma derivada de ordem inteira. Outra característica de uma particular derivada de ordem não inteira é o intrigante fato de não apresentar o valor nulo para a derivada de uma constante. Esses dois fatores, a não localidade e a derivada de uma constante, por si só fazem com que seu estudo seja, no mínimo, desafiador e, com certeza, é a mola propulsora para que um estudante possa fazer parte da "comunidade fracionária".

Assim, vamos dividir este tema em duas linhas de pesquisa, a saber: o estudo puramente matemático onde, por exemplo, emerge naturalmente o estudo de uma classe de funções, as chamadas funções de Mittag-Leffler que não são um particular caso das funções hipergeométricas. Tais funções são um caso particular das funções de Fox, advindas das representações do tipo Mellin-Barnes em que o plano complexo desempenha papel importante.

Por outro lado, mencionamos as aplicações onde, no caso de equações diferenciais de ordem não inteiras, lineares, as transformadas integrais desempenham papel importante, pois refletem a maneira clássica de abordar tais equações. É neste sentido que tem início a formulação de um sem número de derivadas, dentre eles, além das classificadas como clássicas, as formulações de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e Caputo; aquelas com o núcleo não singular as quais mencionamos apenas a primeira delas, a formulação de Caputo-Fabrizio, bem como outras tantas que ora mudam o núcleo, ora introduzem uma função especial, até a forma mais geral, a derivada de ordem não inteira de uma função em relação a outra função, dentre elas, mencionamos a formulação da derivada ψ-Hilfer, recentemente introduzida.

Acreditamos que estas duas linhas de pesquisa já se constituem em suficiente material motivador para o ingresso de um estudante na "comunidade fracionária", mas como se não bastasse, existem vários problemas em aberto que por si só se constituem em linhas de pesquisa própria, apenas para mencionar, a interpretação geométrica ou física da derivada fracionária, bem como o estudo da difusão anômala, onde o estudante vai se deparar com equações diferenciais, equações integrais, dentre outras, lineares e não lineares, neste último a metodologia das transformadas integrais não pode ser utilizada.

Assim, com a metodologia do cálculo de ordem não inteira, justificamos a pergunta do estudante relativa à ordem da derivada, pois, como já mencionamos, existe mais de uma formulação de derivada de ordem não inteira sendo que nem todas têm a derivada de uma constante igual a zero. Por fim, antes de responder a algumas perguntas, em particular, o encontro com o cálculo fracionário, vale a pena mencionar uma singela linha do tempo destacando fatos que marcaram a trajetória desta cada vez mais importante área da matemática.

O ano de 1695 pode ser considerado o marco inicial do cálculo de ordem não inteira, pois, para muitos pesquisadores, uma possível troca de correspondência entre l'Hôpital e Leibniz tenha desencadeado questionamentos que a partir de então, levou pesquisadores do quilate de Liouville, Fourier, Euler e Riemann, dentre muitos outros, a se debruçar sobre o tema, uns mais outros menos, mas apresentando marcantes contribuições ao estudo e desenvolvimento do Cálculo Fracionário.

No ano de 1969, Caputo introduziu a derivada de ordem inteira no integrando e, devido a isso, a derivada de ordem não inteira de uma constante é zero. A partir de então, todas as formulações desse tipo, isto é, a integral de ordem não inteira de uma derivada de ordem inteira atendem pelo nome de formulações tipo Caputo. Até o ano de 1974 os trabalhos publicados no tema podem ser considerados esporádicos, pois a primeira conferência internacional com um tema específico ocorreu na Universidade de New Haven, no Estado de Connecticut (EUA). Agora, com uma linha de pesquisa consolidada começaram a ser publicados vários livros sobre o tema, bem como nas décadas de oitenta e noventa, muitos pesquisadores ao redor do mundo fizeram contribuições relevantes, em particular, relacionadas a possíveis interpretações da derivada fracionária. É também a partir desse período que se consolidam os simpósios e congressos dedicados exclusivamente ao Cálculo Fracionário culminando, no final do século passado, com o site FRACALMO (http://www.fracalmo.org/), Fractional Calculus Modelling.

Neste século, podemos assegurar que o Cálculo Fracionário está perfeitamente consolidado, não só como linha de pesquisa, mas também em muitos centros como disciplina de graduação e/ou pós-graduação, o que entendemos ser o resultado do esforço de vários pesquisadores. Podemos garantir que em todos os grandes centros de pesquisa encontramos profissionais trabalhando com o Cálculo Fracionário.

Por fim, comigo não foi diferente, no início da década de noventa tomei conhecimento da pesquisa do Prof. Mainardi, também um físico de formação, por meio de uma correspondência em que me solicitava um *preprint* de um trabalho. Não tínhamos a facilidade do e-mail, então respondi enviando o *preprint*, mas não teve continuação de, por exemplo, uma pesquisa em conjunto, visto que até os dias de hoje, é de fundamental importância, pois possibilita a divulgação de resultados de forma mais rápida e abrangente. Quando surgir a oportunidade, não a deixem escapar, aproveitem.

No ano de 2005 passei a me dedicar ao Cálculo Fracionário, não deixando de lado algumas outras colaborações que caminhavam em paralelo, até que em 2009 ocorreu a apresentação da primeira tese de doutorado exclusivamente sobre Cálculo Fracionário. A partir daí foram muitas outras orientações, tanto em nível de doutorado, quanto em dissertações de mestrado, culminando com a publicação de muitos resultados em várias revistas especializadas.

Em 2015 foi publicado em português, o primeiro livro de Cálculo Fracionário, e em 2019 dois outros, sendo um deles uma introdução ao Cálculo Fracionário em espanhol, ambos em colaborações, bem como um livro de exercícios resolvidos e propostos. Decididamente quando me perguntei sobre o encontro com o Cálculo Fracionário, já estava imerso no tema e não mais o abandonaria.

Concluo apresentando uma lista de algumas poucas referências com um breve comentário, para aqueles que desejam ingressar no tema, e garanto que há muita coisa a ser feita de tal modo que o encontro de cada um com o Cálculo Fracionário pode ser, no mínimo, gratificante e, por que não, único. Finalizo agradecendo à equipe da INTERMATHS, em nome de seu editor e desejando um Feliz 2022 a todos. Sucesso!

Referências

[1] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1993).

Este livro começa com um ótimo levantamento histórico, priorizando os pesquisadores que contribuíram com resultados associados ao cálculo fracionário. Apresenta algumas das definições para a derivada fracionária, mas infelizmente não menciona o nome de Caputo, visando o estudo das equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes. Por fim, é feito um aceno às equações diferenciais com coeficientes não constantes.

[2] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Intergrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, (1993).

Após uma breve introdução de notas históricas, este livro apresenta um tratamento matemático rigoroso das integrais e derivadas fracionárias, visando aplicações. Apresenta um grande número de formulações da derivada fracionária, porém também, não menciona o nome de Caputo, mas sim a versão de Dzherbashyan e que vários pesquisadores escrevem como tipo Caputo-Dzherbashyan. Este livro, hoje um clássico, destina-se a estudantes e profissionais.

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *The Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, (2006).

Este livro, também um clássico, é direcionado aos estudantes e profissionais no tema equações diferenciais fracionárias. Apresenta uma série de aplicações sem deixar de lado a teoria. Acredito que deva ser lido antes do livro de Samko, Kilbas e Marichev.

[4] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, *Recent history of fractional calculus*, Commun. Nonl. Sci. Num. Simulat., **16**, 1140-1153, (2011). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.027

Este é um artigo publicado numa importante revista especializada. É de fácil leitura e faz menção a dois outros trabalhos dos mesmos autores, disponibilizados em pôsteres, em tamanho A3, onde é apresentada, numa linha do tempo, a história dos antigos e dos novos pesquisadores que contribuíram de forma marcante com o cálculo fracionário.

[5] R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira, *Cálculo Fracionário*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2015). ISBN 9788578613297

O livro apresenta uma breve introdução ao cálculo fracionário. Publicado em português, focando nas formulações da derivada fracionária nas versões de Riemann-Liouville e Caputo, ainda que sejam mencionadas outras, inclusive algumas que não podem ser consideradas como fracionárias, conforme critério para a possibilidade de uma derivada ser fracionária. Diferentemente dos livros anteriores, vários exercícios são discutidos e outros deixados para o leitor.

[6] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi and T. Atanacković, *Round Table Discussion - Fractional Calculus: D'où venons nous? Que sommes-nous? Où allons nous?*, Frac. Cal. & Appl. Cal., **19**, 1074-1104, (2016). https://doi.org/10.1515/fca-2016-0059

Este é um artigo que vale a pena ser lido, pois apresenta várias discussões proferidas por pesquisadores de ponta. Apresenta uma série de "portas que podem se abrir", pois se constituem em problemas em aberto.

[7] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira, *On the generalized* (k, ρ)-*fractional derivative*, Progr. Fract. Differ. Appl., **2**, 133-145, (2018). http://dx.doi.org/10.18576/pfda/040207

Neste artigo, uma consequência natural advinda da tese de doutorado da autora introduz uma derivada que contém várias outras como casos particulares. Essa formulação contempla uma nova classe de derivadas fracionárias, aquelas que envolvem um novo parâmetro, além da respectiva ordem da derivada.

[8] J. V. da Costa Sousa and E. Capelas de Oliveira, *On the* ψ-*Hilfer fractional derivative*, Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat., **60**, 72-91, (2018). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.01.005

Neste artigo, uma consequência natural advinda da tese doutorado do autor introduz uma derivada que contém várias outras como casos particulares. Essa formulação contempla uma nova classe de derivadas fracionárias, aquelas que têm a derivada fracionária relativamente a uma outra função e contempla uma ampla classe de derivadas fracionárias obtidas como casos particulares, seja do parâmetro, seja da função.

[9] G. Sales Teodoro, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas de Oliveira, *A review of definitions of fractional derivatives and other operators*, J. Comput. Phys., **388**, 195-209, (2019). https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.008

O artigo, uma natural continuação de um outro artigo dos autores, é uma consequência advinda da tese doutorado da autora, coleta e subdivide várias formulações da derivada fracionária, destacando as consideradas formulações clássicas, bem como apresenta o critério de validade para todas as formulações nele abordadas.

[10] A. R. Gómez Plata y E. Capelas de Oliveira, *Introducción al Cálculo Fraccional*, Editorial Neogranadina, Bogotá, (2019). https://doi.org/10.18359/9789588795812

Este é um livro em espanhol, que apresenta de forma simples as primeiras noções do cálculo fracionário, discutindo apenas as formulações da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, e conta com várias aplicações onde a função de Mittag-Leffler desempenha papel fundamental. O texto não conta com exercícios propostos para o leitor.

[11] E. Capelas de Oliveira, *Solved Exercises in Fractional Calculus*, Studies in Systems, Decision and Control, vol. 240, Springer Nature Switzerland AG, (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20524-9

Até esta data era o único livro de exercícios resolvidos e propostos, com soluções, onde o estudante e/ou o profissional pode percorrer o estudo do cálculo fracionário numa ordem relativamente natural. Após um breve levantamento histórico, são apresentadas as funções especiais, com destaque para a função de Mittag-Leffler, as transformadas integrais, Laplace, Fourier e Mellin e as diversas formulações, com destaque para aquelas consideradas clássicas. Ao final, oferece um capítulo todo dedicado às aplicações relativas a vários artigos publicados em periódicos especializados, e aqueles considerados clássicos.

[12] E. Capelas de Oliveira, S. Jarosz, and J. Vaz Jr., *On the mistake in defining fractional derivative using a non-singular kernel*, arXiv:1912.04422v3.

Os autores questionam e provam que algumas formulações não podem ser consideradas fracionárias. Para tal, utilizam a metodologia da transformada de Laplace.

[13] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer Monograph in Mathematics, Second Edition, Heidelberg, (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2

Com toda a certeza é um interessante compêndio sobre a função de Mittag-Leffler, cunhada por um dos autores como a *rainha* das funções especiais do cálculo fracionário. São apresentadas e discutidas as funções de Mittag-Leffler conforme o número de parâmetros, desde a clássica, como introduzida por Mittag-Leffler contendo um parâmetro, até a generalizada contendo um número inteiro de parâmetros. São várias as aplicações, percorrendo modelos determinísticos e modelos estocásticos. Seis excelentes apêndices concluem o texto. Uma série de exercícios apresentados por capítulos, é deixada a cargo do leitor.

[14] J. Vaz Jr. and E. Capelas de Oliveira, *On the fractional Kelvin-Voigt oscillator*, Math. Eng., 4, 1-23, (2022). https://doi.org/10.3934/mine.2022006

Aqui, diferentemente da maioria dos autores, discute-se o modelo que atende pelo nome de oscilador fracionário, porém tendo a derivada fracionária não na derivada de ordem dois e sim associada à primeira ordem, recuperada a partir de um conveniente processo de limite.

|Aceito: 23 de novembro de 2021| |Publicado: 28 de dezembro de 2021|

Breve Biografia

Edmundo Capelas de Oliveira **https://orcid.org/0000-0001-9661-0281**

Doutor em Física pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Fez pós-doutorado junto à Università di Perugia, Itália. Atualmente é Professor Titular junto ao Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matematica e Estatísitica e Computação Científica da Unicamp. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Métodos Matemáticos da Física, atuando principalmente nos temas: cálculo integrodiferencial fracionário, funções especiais, funções analíticas e equações diferenciais.