

Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra

João Paulo Martins dos Santos 

Academia da Força Aérea,
Pirassununga, SP, Brasil

jp2@alumni.usp.br

Alessandro Firmiano de Jesus 

Academia da Força Aérea,
Pirassununga, SP, Brasil

lezandro@gmail.com

Juan López Linares 

Faculdade de Zootecnia e
Engenharia de Alimentos,
Universidade de São Paulo,
Pirassununga, Brasil

jlopez@usp.br

Marcos P. O. Ramalho de Freitas 

Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Sudeste
de Minas Gerais, Muriaé, MG,
Brasil

marcos.oliveira@ifsudestemg.edu.br

Different perspectives of an optimization problem: Dynamic Mathematics with GeoGebra

Abstract

This article explores three Euclidean geometry problems from the point of view of functions of two variables and a representation involving dynamic colors using the GeoGebra software. Initially, the problems involve the global minimization of quantities and are related to the centroid G , the Fermat-Steiner point and the Lemoine point. Geometric patterns not apparent in the geometric formulas are interestingly highlighted through dynamic color schemes. Finally, the imposition of constraints on the geometric variable results in a constrained minimization problem, which is solved analytically and numerically. The analysis of the results shows an interesting perspective of the relationships between geometry and the functions of two variables concatenated by discrete graphic elements that reflect the geometric pattern hidden in the formulas and that resemble the contours of a function of two variables.

Keywords: Barycenter; Centroid; Fermat point; Steiner's point; Lemoine Point.

Resumo

O presente artigo explora três problemas de geometria euclidiana sob o aspecto das funções de duas variáveis e uma representação envolvendo cores dinâmicas por meio do software GeoGebra. Inicialmente, os problemas envolvem a minimização global de quantidades e estão relacionados ao baricentro G , ao ponto de Fermat-Steiner e ao ponto de Lemoine. Padrões geométricos não aparentes nas fórmulas geométricas são evidenciados de forma interessante por meio dos esquemas de cores dinâmicas. Por fim, a imposição de restrições para a variável geométrica tem como consequência um problema de minimização restrito, o qual é resolvido de forma analítica e numérica. A análise dos resultados mostra uma interessante perspectiva das relações entre geometria e as funções de duas variáveis concatenadas por elementos gráficos discretos que refletem o padrão geométrico escondido nas fórmulas e que se assemelham às curvas de nível de uma função de duas variáveis.

Palavras-chave: Baricentro; Centróide; Ponto de Fermat; Ponto de Steiner; Ponto de Lemoine.

MSC (2020): 51-02; 97G40; 97I60; 97N99.

1 INTRODUÇÃO

A solução geométrica de problemas envolvendo minimização de quantidades pode ser abordada de diferentes pontos de vista. Um exemplo, é o ponto $P(x, y)$ do plano que tem como resultado a soma dos quadrados das distâncias aos vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Este ponto é o Baricentro (G), descrito na Enciclopédia dos Centros de Triângulo por X_2 [1]. Uma abordagem alternativa à abordagem geométrica, apresentada em [2], é a obtenção do ponto G por meio da minimização de uma função de duas variáveis f conforme apresentado [4]. Algumas aplicações, provenientes das Olimpíadas Internacionais, envolvendo o Baricentro são apresentados em [3].

Diferentes abordagens para problemas envolvendo máximos e mínimos são apresentadas em [5]. Os autores apresentam as soluções de alguns problemas clássicos em geometria euclidiana por meio do emprego diversificado de técnicas de solução. As transformações geométricas, desigualdades algébricas, cálculo diferencial e integral, o método das variações parciais e o Princípio da Tangência.

As transformações geométricas podem ser ilustradas por meio das simetrias com respeito a linha ou ponto, rotações e dilatações [5]. As desigualdades algébricas podem ser ilustradas por meio das desigualdades da média aritmética em relação à geométrica, a raiz média quadrática e a média aritmética (em inglês *Root Mean Square–Arithmetic Mean Inequality*), a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Minkowski's. O método das variações parciais é baseado na observação que uma função de várias variáveis tem máximo (respectivamente, mínimo) com respeito a todas as variáveis, então tem um máximo (mínimo) com respeito a qualquer subconjunto de variáveis (ver [5] para maiores detalhes). Por fim, o Princípio da Tangência é baseado nas curvas de nível. O mínimo (máximo) valor de uma função f no plano em uma curva L é atingido nos pontos onde L é tangente à curva de nível de f .

Os problemas de geometria, escritos na forma de funções de várias variáveis, e envolvendo máximos e mínimos podem ser resolvidos com auxílio dos Teoremas de Cálculo Diferencial e Integral. Em [5], os autores apresentam uma série de resultados seguidos de um conjunto de exemplos ilustrativos do emprego de Cálculo Diferencial e Integral. Neste caso, a minimização de funções de uma ou mais variáveis podem ser encontrados nos clássicos textos de Cálculo Diferencial e Integral amplamente difundidos.

O presente artigo, tem foco na discussão de problemas geométricos de minimização que são expressos em termos de funções de duas variáveis. Um elemento adicional é a visualização utilizando cores dinâmicas que, por sua vez, integram uma característica lúdica à questão. Esta não é entendida no sentido dos jogos e brincadeiras, mas mais no sentido da geração de gráficos e figuras com cores destacadas e distintas que apontam os pontos de máximos ou mínimos de forma similar àquela visualizada por meio das curvas de nível.

2 GEOGEBRA: MATEMÁTICA DINÂMICA

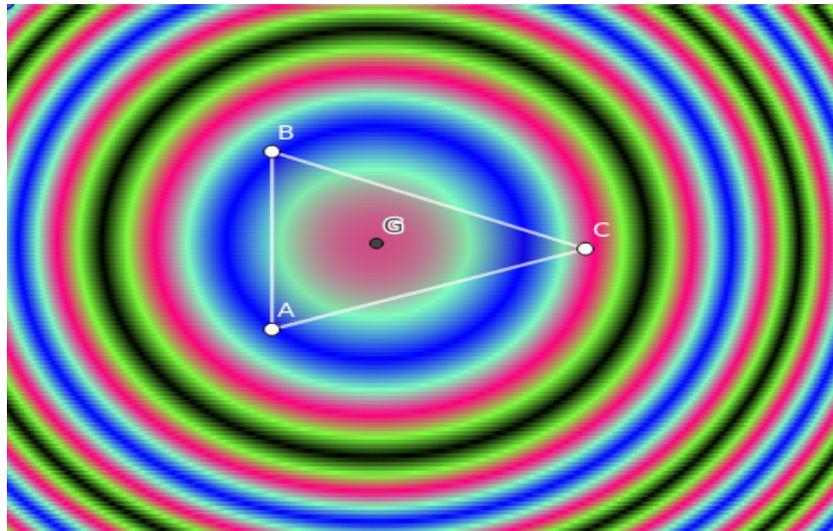
O GeoGebra é um software fundamentado em um aspecto dinâmico e com foco em ensino com objetivo de atuação em ramos diversos da Matemática. Um detalhamento pode ser obtido em [6]. A versatilidade é aparente na forma e representação dos objetos e propicia o uso de forma direta e sem conhecimento de programação computacional. Entretanto, o conhecimento em linguagem de programação JavaScript pode ser usado para construções mais elaboradas e que não são possíveis de serem realizadas com o uso das funções disponibilizadas ou o emprego da linguagem GeoGebra Script [7].

As funções disponíveis no GeoGebra podem ser encontradas nas páginas relacionadas à referência [8]. A utilização destes elementos de forma mais concatenada e em problemas específicos envolvendo mínimos tem como base as referências [9] e [10]. Estes apresentam, respectivamente, uma discussão para a elaboração de figuras envolvendo cores dinâmicas por meio do uso de sequências de pontos e um problema de minimização. O primeiro adota a construção de uma sequência de pontos, em geral vertical, dependente de um controle deslizante t (em inglês *Slider*) e associa um esquema RGB a cada ponto da sequência. Ao acionar o rastro e percorrer o intervalo de variação de t , obtém-se uma figura que é colorida conforme o esquema apontado nas fórmulas do esquema RGB. O segundo segue uma ideia similar, porém com um problema de minimização envolvendo as distâncias aos vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Ambos os autores apresentam resultados gráficos de exploração do GeoGebra em contextos diversos (ver [10] e [9] para maiores detalhes e referências).

Um exemplo da visualização utilizando um esquema de cores dinâmicas do tipo RGB é apresentado na Figura 1. O resultado é a ilustração da soma dos quadrados das distâncias de um ponto P aos respectivos vértices do triângulo $\triangle ABC$, denominada D , arbitrariamente escolhido. A ilustração destaca relações entre a Geometria Plana e as funções de várias variáveis por meio de um padrão com aspecto similar às curvas de nível. Este não pode ser entendido como uma figura proveniente de um algoritmo de geração de curvas de nível no sentido estrito da palavra devido às características cíclicas do esquema RGB, pois é a composição das cores vermelho (R), verde (G) e azul (B) em um intervalo $J = [0, 1]$. Um valor t fora do intervalo é mapeado em J por meio da função $2 \left\lfloor \frac{t}{2} - \text{round} \left(\frac{t}{2} \right) \right\rfloor$ [11].

Apesar disso, a Figura 1 guarda em si, os aspectos fundamentais de curvas de nível. No contexto da Geometria plana, o ponto que fornece o mínimo da soma das distâncias ao quadrado é o Baricentro (G), reconhecido como número de Kimberling $X(02)$ dentre os pontos da Enciclopédia de Centros de Triângulos (ETC)[1].

Figura 1: Cores dinâmicas para a soma das distâncias ao quadrado de um ponto $P(x, y)$ aos vértices do triângulo $\triangle ABC$: $D = PA^2 + PB^2 + PC^2$. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores

No presente artigo, a quantidade D também será visualizada por meio de duas formas distintas, fornecendo uma visualização interessante do problema. A primeira forma refere-se a um conjunto de pontos do plano conforme destacado na figura anterior, enquanto que a segunda é uma superfície no espaço 3D originada de uma função de duas variáveis. Os resultados referentes à exploração deste e de outros problemas são apresentados nas seções 4, 5 e 7. A seguir, uma argumentação sobre a construção de uma figura similar à 1 é apresentada em um contexto simplificado. Uma argumentação para a visualização da função de duas variáveis e respectivas curvas de nível e interpretação também são consideradas.

3 ELEMENTOS EXPLORATÓRIOS

Considere que dois pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ são os limites inferior e superior de um retângulo R . Seja $C(x_c, y_c)$ um ponto tal que $x \in [x_0, x_1]$ e $y \in [y_0, y_1]$ de tal forma que o parâmetro $cor = (\overline{AC} + \overline{BC})/\alpha$ forneça o esquema de cores do ponto $C \in R$, com α uma constante arbitrária fixa. Os pontos no espaço 3D dados por $Z(x_c, y_c, cor)$ estão sobre a superfície $Z = f_C(x, y)$ dada por:

$$f_C(x, y) = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}{\alpha} \quad (1)$$

em que α é um parâmetro. Se $\alpha = 1$, então a soma dos comprimentos dos segmentos AC e BC é obtida.

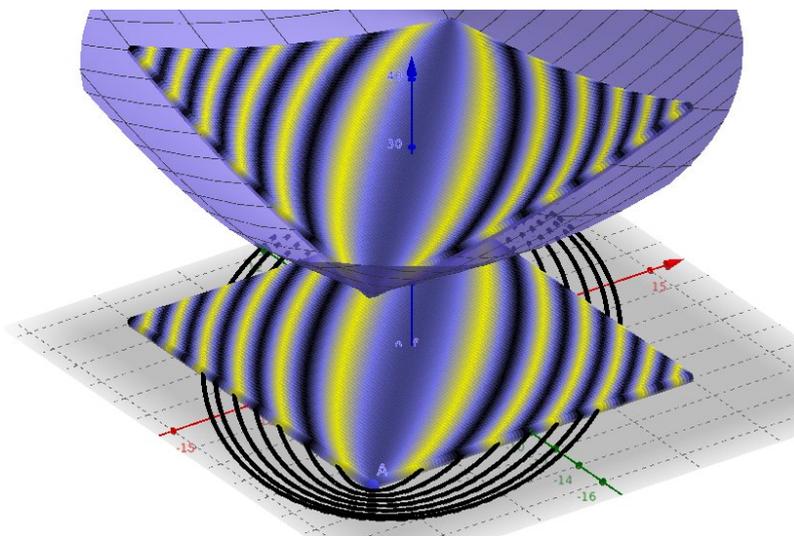
De posse da expressão (1), é possível representar as curvas de nível da função f_C no

plano XY , a observação do gráfico (x, y, f_C) e a respectiva representação discreta discreta dos pontos $Z(x_c, y_c, cor) = Z(x_c, y_c, f_C(x_c, y_c))$. A Figura 2 ilustra os pontos Z , o esquema de cores dinâmicas no conjunto de pontos C sobreposto às curvas de nível de (1) no plano XY e a superfície f_C . É válido mencionar que as figuras utilizaram a técnica de varredura, apresentada em [9], com a tripla dos canais de cores $(R, G, B) = (cor, -cor, 2 \cdot cor)$.

Devido à definição cíclica dos valores em cada canal de cor, as figuras no plano não podem ser interpretadas no sentido das curvas de nível de f_C . Em palavras, se $f_C(x, y) = k_1$ e $f_C(x, y) = k_2$ são duas curvas de nível, então ainda podem ter mesma coloração desde que:

$$2 \left| \frac{k_1}{2} - \text{round} \left(\frac{k_1}{2} \right) \right| = 2 \left| \frac{k_2}{2} - \text{round} \left(\frac{k_2}{2} \right) \right|.$$

Figura 2: Esquema de cores dinâmicas envolvendo o esquema de cores no plano 2D e no espaço 3D em GeoGebra. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

A seguir, alguns problemas envolvendo minimização de quantidades geométricas são apresentados. Em alguns casos, as soluções geométricas são conciliadas com as soluções provenientes de funções de duas variáveis. O problema geométrico é representado no plano XY para figura da forma 2. As respectivas soluções são apresentadas com foco no conceito de funções utilizando as ferramentas de minimização disponíveis no GeoGebra. Quando possível, os cálculos algébricos dos valores mínimos ou máximos são concatenados às demonstrações geométricas e referências adicionais.

4 BARICENTRO

Problema 01: Considere um triângulo ΔABC qualquer e sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ as respectivas coordenadas dos vértices. Determine o ponto $P(px, py)$ tal que a soma das distâncias ao quadrado do ponto P aos respectivos vértices, $d = d(x, y) =$

$PA^2 + PB^2 + PC^2$, seja mínima.

Uma referência interativa para a exploração das propriedades do Baricentro pode ser encontrado em [14]. Alternativamente, [3] apresenta um conjunto de problemas relacionado ao tema olímpico e uma exploração do assunto por meio de coordenadas baricêntricas é feita em [13].

Por sua vez, a Figura 1 mostra o esquema de cores dinâmicas $(R, G, B) = (cor, cor/2, 2cor)$ e o Baricentro, denotado por G e obtido diretamente do GeoGebra por meio da função de centros de triângulo. Com base na análise gráfica, é possível observar a convergência dos círculos concêntricos e, portanto, indutivamente a presença de um ponto G . Esta apresentação tem um caráter lúdico e serve para ilustrar padrões eventualmente escondidos nos problemas geométricos. Do ponto de vista algébrico, a função que caracteriza a distância D , em coordenadas cartesianas, é dada pela função de duas variáveis:

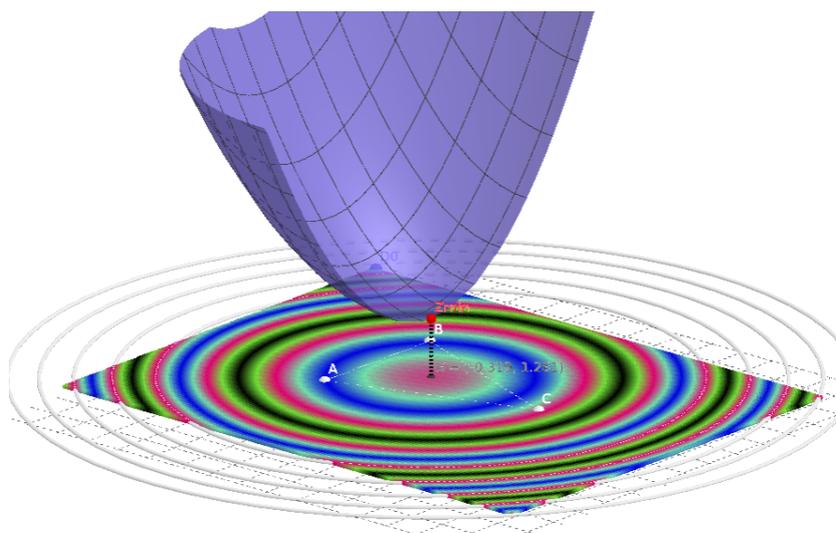
$$f_C(x, y) = \sum_{i \in \{a, b, c\}} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

A solução pode ser obtida diretamente por meio da técnica padrão de Cálculo Diferencial e Integral com o ponto G que fornece o mínimo de f_C dado por $G = (G_x, G_y) = ((x_a + x_b + x_c)/3, (y_a + y_b + y_c)/3)$ [4].

A Figura 3 mostra a Figura 1 no plano XY , algumas curvas de nível de f_C e a restrição de f_C aos valores $x \leq G_x$ de forma que é possível observar o ponto $Z_{min} = (G_x, G_y, f_C(G_x, G_y))$.

Figura 3: Superfície $f_C(x, y)$ que fornece a soma das distâncias ao quadrado aos vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Figura de cores dinâmicas no plano XY e curvas de nível. Link

interativo disponível .



Fonte: Os autores.

A próxima subsecção apresenta uma modificação do problema 1, pela imposição de restrições ao domínio de f_C . Neste caso, a solução é restrita aos valores da função f_C definidos sobre os lados do triângulo.

MÍNIMO SOB UMA RESTRIÇÃO DE DOMÍNIO

Problema 01 com restrição: Considere um triângulo ΔABC qualquer e sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ as respectivas coordenadas dos vértices. Determine o ponto $P(px, py)$ sobre os lados do triângulo de tal forma que a soma das distâncias ao quadrado do ponto P aos respectivos vértices, $d = d(x, y) = PA^2 + PB^2 + PC^2$, seja mínima.

A Figura 4 (direita) mostra o triângulo ΔABC no plano XY , a função f_C e respectivas interseções dos planos perpendiculares ao plano XY e que passam pelos segmentos AB , AC e BC .

Como a função f_C deve ser restrita aos lados do triângulo, então suponha, sem perda de generalidade, que x pertence ao segmento AB com $x(A) < x(B)$ e seja $L_{AB}(x) = a_{ab}x + b_{ab}$ a restrição da reta passando por A e B ao intervalo $[x(A), x(B)]$. A restrição de f_C ao lado AB pode ser visualizada pela interseção da superfície f_C com o plano passando pelos pontos A , B e $z = (x(A), y(A), f_C(x(A), y(A)))$ e pode ser obtida pela expressão (2) dada a seguir:

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i \in \{a, b, c\}} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \\ L_{AB}(x) = a_{ab}x + b_{ab}, \quad x(A) \leq x \leq x(B) \end{cases} \quad (2)$$

Analogamente, obtém-se as expressões (3) e (4):

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i \in \{a, b, c\}} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \\ L_{AC}(x) = a_{ac}x + b_{ac}, \quad x(B) < x \leq x(C) \end{cases} \quad (3)$$

e

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i \in \{a, b, c\}} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \\ L_{BC}(x) = a_{bc}x + b_{bc}, \quad x(A) < x < x(C) \end{cases} \quad (4)$$

Uma análise das expressões, indica que no plano XY , as coordenadas dos pontos (x, y) são relacionadas por meio das expressões das retas restritas aos segmentos. Logo, a variável y da função f_C pode ser substituída pelas expressões L_{AB} , L_{AC} e L_{BC} e, portanto, a função que ser minimizada pode ser escrita como segue:

$$g_C = \begin{cases} f_C(x, L_{AB}(x)), & x(A) \leq x \leq x(B) \\ f_C(x, L_{BC}(x)), & x(B) < x \leq x(C) \\ f_C(x, L_{AC}(x)), & x(A) < x < x(C) \end{cases} \quad (5)$$

A função g_C é definida por partes com componentes quadráticas restritas em intervalos da reta real. No caso da restrição ao segmento AB , a expansão dos termos binomiais e agrupamento das potências de x , retornam a expressão:

$$\begin{aligned} f(x, L_{AB}(x)) &= \sum_{i \in \{a,b,c\}} (x - x_i)^2 + (y - (a_{ab}x_i + b_{ab}))^2 \\ &= (3 + 3a_{ab}^2) \cdot x^2 + (-2(x_a + x_b + x_c) + 2a_{ab}(3b_{ab} - (y_a + y_b + y_c))) \cdot x \\ &\quad + (x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + (b_{ab} - y_a)^2 + (b_{ab} - y_b)^2 + (b_{ab} - y_c)^2) \end{aligned}$$

Logo, a abscissa do vértice, restrita ao segmento AB , é dada por:

$$x_{v_{ab}} = -\frac{(-2(x_a + x_b + x_c) + 2a_{ab}(3b_{ab} - (y_a + y_b + y_c)))}{2(3 + 3a_{ab}^2)}. \quad (6)$$

Analogamente, as demais abscissas são:

$$x_{v_{bc}} = -\frac{(-2(x_a + x_b + x_c) + 2a_{bc}(3b_{bc} + y_a + y_b + y_c))}{2(3 + 3a_{bc}^2)} \quad (7)$$

e

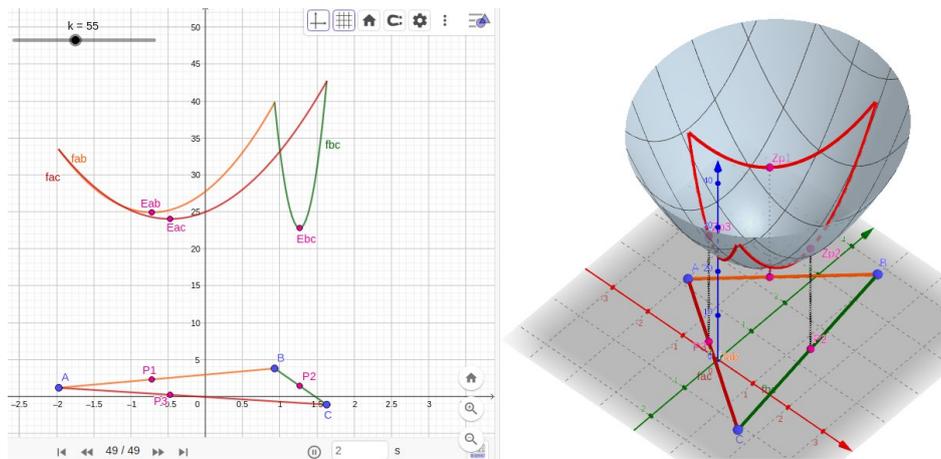
$$x_{v_{ac}} = -\frac{(-2(x_a + x_b + x_c) + 2a_{ac}(3b_{ac} + y_a + y_b + y_c))}{2(3 + 3a_{ac}^2)} \quad (8)$$

Suponha que respectivas abscissas dadas em (6), (7) e (8) produzam os pontos $P1(x_{v_{ab}}, L_{AB}(x_{v_{ab}}))$, $P2(x_{v_{bc}}, L_{BC}(x_{v_{bc}}))$ e $P3(x_{v_{ac}}, L_{AC}(x_{v_{ac}}))$. Os valores extremos em cada um dos segmentos são calculados por: $E_{ab} = f_C(P1)$, $E_{bc} = f_C(P2)$ e $E_{ac} = f_C(P3)$. Como consequência, o valor mínimo Z_{min} é aquele obtido por:

$$Z_{min} = \min(\{E_{ab}, E_{bc}, E_{ac}\}). \quad (9)$$

A Figura 4 mostra a função f_C , as respectivas restrições de f_C aos lados do triângulo (à direita). À esquerda está uma visualização, no plano XY , do triângulo ΔABC e das curvas sob as restrições aos lados. É necessário observar que os segmentos parabólicos da figura à esquerda são redefinições da função f_C restritas aos lados para visualização no mesmo plano do triângulo e, portanto, funções de uma única variável x . É, portanto, um artifício para a visualização dos resultados sobre os lados do triângulo.

Figura 4: A restrição da superfície f_C aos lados do triângulo, visualizada por meio de uma função de uma variável com pontos de mínimo obtidos diretamente com o GeoGebra. Função no espaço 3D e respectivas curvas reais. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

É necessário notar que as expressões (6), (7) e (8) assumem, implicitamente, que as abscissas dos vértices pertencem ao segmento do triângulo. A seção 5 ilustra graficamente o caso em que não há vértice da parábola no intervalo definido pelo segmento e respectivas consequência e solução.

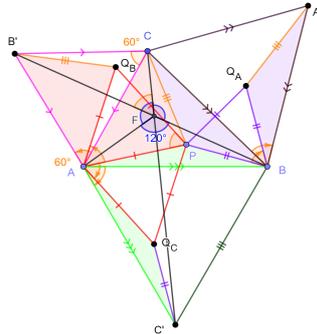
5 PROBLEMA 02: PONTO DE FERMAT

Problema 02: Considere um triângulo ABC qualquer com ângulos internos menores que 120° e sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ as respectivas coordenadas dos vértices. Determine o ponto $P(px, py)$ tal que a soma distâncias entre P e os respectivos vértices, $D = PA + PB + PC$, seja mínima.

Este é um problema conhecido da literatura e o ponto P que torna a soma mínima é o ponto de *Fermat* ou *Steiner*. Os autores [12] e [5] são duas referências para a solução do problema. A solução completa, baseada na geometria euclidiana, é composta de dois casos possíveis: primeiro quando todos os ângulos internos do triângulo são menores que 120° e o segundo quando um dos ângulos é maior ou igual a 120° .

Primeiro caso: Seja P um ponto arbitrário no interior do $\triangle ABC$. Construa o $\triangle AQ_B B'$ com uma rotação de 60° no sentido anti-horário, com centro em A , do $\triangle APC$. De modo similar, construa o $\triangle BQ_A A'$ com uma rotação de 60° no sentido horário, com centro em B , do $\triangle BPC$ e o $\triangle AQ_C C'$ com uma rotação de 60° no sentido horário, com centro em A , do $\triangle APB$ conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5: Construção geométrica para o caso em que todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° . Link interativo disponível .



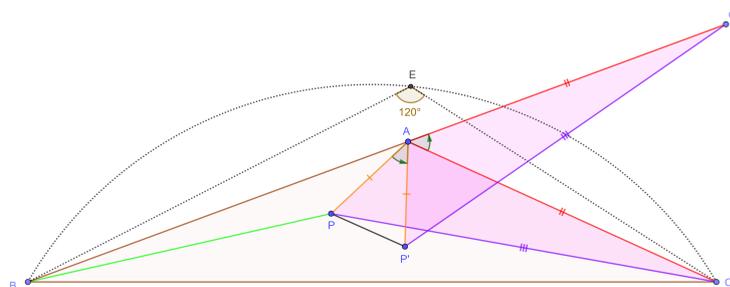
Fonte: Os autores.

Por construção, $\triangle AQ_B B' \equiv \triangle APC$, $\triangle BQ_A A' \equiv \triangle BPC$ e $\triangle AQ_C C' \equiv \triangle APB$. Além disso, os triângulos $\triangle ACB'$, $\triangle BCA'$, $\triangle ABC'$, $\triangle APQ_B$, $\triangle BPQ_A$ e $\triangle APQ_C$ são equiláteros e, portanto, pela desigualdade triangular $PC + PB + PA = PC + PQ_C + Q_C C' \geq CC'$, e $PC + PB + PA = B'Q_B + PB + Q_B P \geq BB'$. As igualdades ocorrem quando os pontos C , P , Q_C e C' e os pontos B' , Q_B , P e B são colineares. Isto é, quando $P = F = CC' \cap BB'$.

Como $\angle BAB' = \angle CAC'$, $BA = C'A$ e $B'A = CA$, então $\triangle BAB' \equiv \triangle CAC'$ e $BB' = CC'$. Logo, o mínimo da soma $PA + PB + PC$ acontece quando $P = F$. Neste caso $\angle B'PA = \angle B'FA = \angle Q_B PA = \angle B'CA = 60^\circ$. Ou seja, F é concíclico com A , B' e C e $\angle AFC = 120^\circ$. Analogamente, $\angle AFB = \angle BFC = 120^\circ$.

Segundo caso: Seja P um ponto do interior do $\triangle ABC$. Construa o $\triangle AP'C'$ por uma rotação do $\triangle APC$ em torno ao vértice A e de tal forma que B , A e C' sejam colineares conforme ilustrado na Figura 6. Como $\angle BAC \geq 120^\circ$, então $\angle CAC' = \angle PAP' \leq 60^\circ$ e $P'A = PA \geq PP'$. Logo, $PA + PB + PC \geq PP' + PB + P'C'$ e, por consequência, a poligonal $BPP'C'$ tem comprimento maior o igual ao segmento BC' ,. Assim, $PA + PB + PC \geq BC' = AB + AC'$. e, finalmente, $AC = AC'$ e $PA + PB + PC \geq AB + AC$.

Figura 6: Construção geométrica para o caso em que $\angle BAC \geq 120^\circ$. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

O ponto de Fermat é referenciado como $X(13)$ dentre os pontos de *Kimberling* disponíveis na Enciclopédia de Centros de Triângulos e, assim como outros centros de triângulos, pode ser expresso em coordenadas baricêntricas e trilineares. As referências [1] e [13] podem ser consultadas para maiores detalhes e referências adicionais.

Ao adotar o ponto de vista das cores dinâmicas da seção 2, com esquema RGB definido pela trinca $(D, 2D, D/2)$ obtém-se a imagem, no plano XY , da Figura 7. A função de duas variáveis f_C que contém a relação entre as coordenadas do ponto $X(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e os vértices do triângulo é dada por:

$$f_C(x, y) = \sum_{i \in \{a, b, c\}} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (10)$$

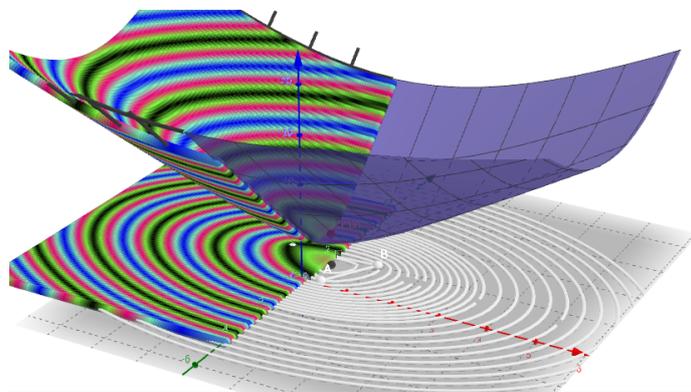
é mostrada na Figura 7. Esta combina o esquema de cores dinâmicas no plano XY , a representação espacial 3D dos pontos com a superfície f_C e as curvas de nível. O padrão de sobreposição apresentado tem objetivo de facilitar a visualização tanto da sobreposição da superfície e o conjunto de pontos 3D quanto da figura 2D com as curvas de nível de f_C .

Do ponto de vista algébrico, o valor mínimo da função f_C , (10), é obtido ao resolver $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (f_C(x, y))$. A solução é similar ao problema de minimizar as somas dos quadrados das distâncias e é discutida em [4]. Os autores apresentam uma perspectiva histórica do problema e utilizam o processo de derivação conjugado com rotações e translações de cada um dos vértices do triângulo ΔABC para a origem. Com o auxílio de software computacional, reduzem as coordenadas cartesianas do ponto F à seguinte fórmula:

$$x_F = tc[a, b, c]x_a + tc[b, c, a]x_b + tc[c, a, b]x_c \text{ e } y_F = tc[a, b, c]y_a + tc[b, c, a]y_b + tc[c, a, b]y_c$$

$$\text{em que } tc[s, t, u] = \frac{(4At + \sqrt{3}(s^2 + t^2 - u^2)) \cdot (4At + \sqrt{3}(s^2 - t^2 + u^2))}{8At \cdot (12At + \sqrt{3}(s^2 + t^2 + u^2))}$$

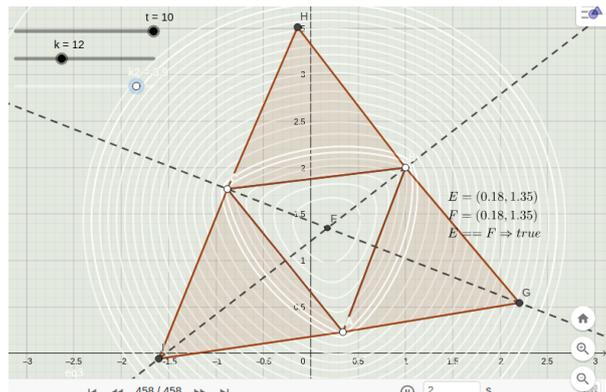
Figura 7: O esquema de cores dinâmicas em 2D e 3D com sobreposição da superfície f_C e as curvas de nível de f_C . Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

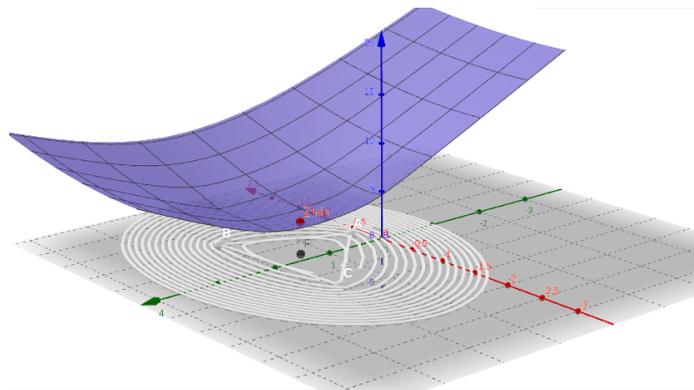
A Figura 8 apresenta o ponto F , obtido por meio de procedimento geométrico, e o ponto E , obtido por meio da fórmula anterior e as curvas de nível de f_C . A verificação da concordância dos resultados é induzida pela variável booleana com valor Verdadeiro (*true*). A visualização do ponto F no espaço é apresentado na Figura 9, que mostra a restrição da função f_C a um retângulo em torno do ponto de mínimo calculado.

Figura 8: Triângulo ΔABC com ângulo menor que 120 graus, curvas de nível de f_C , triângulos equiláteros sobre os lados de ΔABC , ponto F e ponto E .



Fonte: Os autores.

Figura 9: Superfície parcial de f_C com destaque para o ponto de mínimo, o triângulo ΔABC no plano XY e curvas de nível.



Fonte: Os autores.

6 PROBLEMA COM RESTRIÇÃO

Problema 02 com restrição: Considere um triângulo ABC qualquer com ângulos internos menores que 120 e sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ as respectivas coordenadas dos vértices. Determine o ponto $P(x, y)$ pertencente a um dos segmentos do triângulo de tal forma que a soma distâncias entre P e os respectivos vértices, $D = PA + PB + PC$, seja mínima.

Seguindo argumentação similar ao problema 01 com função (10), o valor mínimo é obtido por meio dos respectivos mínimos restritos aos lados do triângulo ΔABC . Assim, as respectivas expressões de f_C com restrições aos lados do triângulo são:

$$f_C(x, L_{AB}(x)) = \sum_{i \in \{a,b,c\}} \sqrt{(x - x_i)^2 + (L_{AB}(x) - y_i)^2}, x(A) \leq x \leq x(B)$$

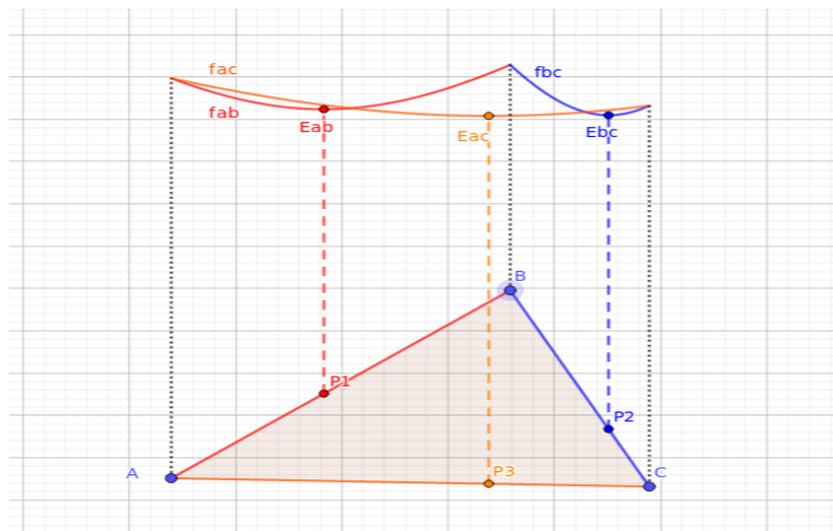
$$f_C(x, L_{BC}(x)) = \sum_{i \in \{a,b,c\}} \sqrt{(x - x_i)^2 + (L_{BC}(x) - y_i)^2}, x(B) < x \leq x(C)$$

$$f_C(x, L_{AC}(x)) = \sum_{i \in \{a,b,c\}} \sqrt{(x - x_i)^2 + (L_{AC}(x) - y_i)^2}, x(A) < x < x(C)$$

A expressão a ser minimizada é idêntica àquela apresentada em (5). A Figura 10 mostra os valores mínimos restritos aos lados de um triângulo ΔABC diferente daquele considerado no problema sem restrição. Neste caso, evita-se a apresentação sobre a superfície 3D por questão de conveniência da análise, pois as justificativas foram apresentadas no item anterior. No entanto, é necessário lembrar que a Figura 10 ainda corresponde ao artifício empregado na seção anterior para visualização no plano XY. Os pontos em que os mínimos P_1 , P_2 e P_3 ocorrem com valores mínimos E_{ab} , E_{bc} e E_{ac} , respectivamente. Neste caso, o valor mínimo é:

$$Z_{min} = \min\{E_{ab}, E_{ac}, E_{bc}\}. \tag{11}$$

Figura 10: Restrições da função f_C aos vértices de um triângulo ΔABC . Disponível .

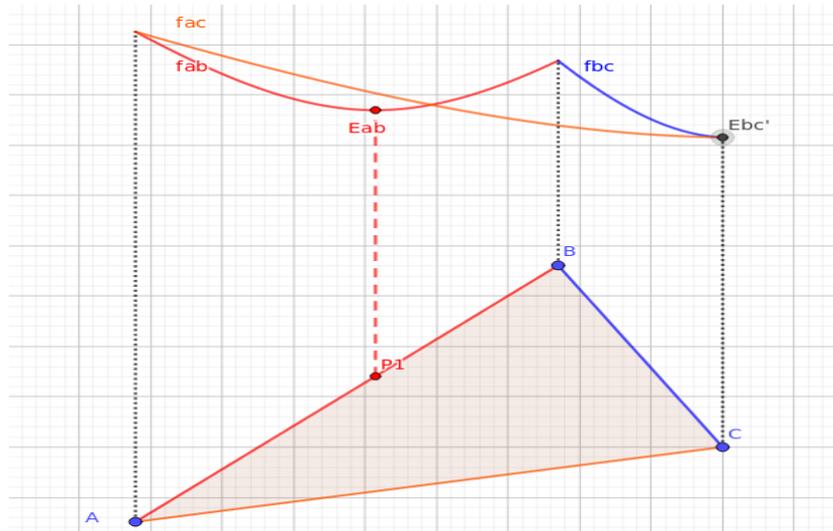


Fonte: Os autores.

Analogamente ao caso anterior, um caso especial escapa à análise proporcionada pela Figura 10. Este, apresentado na Figura 11, mostra que o ponto de mínimo não é calculado

para o lado AC , pois a função é definida no intervalo aberto, ou seja, $E_{ac} = \emptyset$. O ponto de mínimo correspondente ao lado BC é $E_{bc'} = g_C(x(C), L_{BC}(x(C))) = f_C(x(C), L_{BC}(x(C)))$. As outras possibilidades podem ser analisadas de maneira análoga.

Figura 11: Restrições da função f_C aos vértices de um triângulo $\triangle ABC$ em que um dos pontos de mínimo não é calculado pelo GeoGebra. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

7 PONTO DE LEMOINE

Problema 03: Considere um triângulo ABC qualquer e sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ as respectivas coordenadas dos vértices. Determine o ponto $P(px, py)$ tal que a soma distâncias entre P e os respectivos lados AB , AC e BC , $D = PAB^2 + PBC^2 + PAC^2$, seja mínima [5].

A demonstração de que o resultado anterior é o ponto de *Lemoine* pode ser encontrada em [5, p. 24, 72]. A função de duas variáveis que descreve o problema é baseada no conceito elementar de distância de ponto a reta e é dada por:

$$f_C(x, y) = \left(\frac{|l_{ab}|}{\sqrt{a_{ab}^2 + b_{ab}^2}} \right)^2 + \left(\frac{|l_{ac}|}{\sqrt{a_{ac}^2 + b_{ac}^2}} \right)^2 + \left(\frac{|l_{bc}|}{\sqrt{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}} \right)^2$$

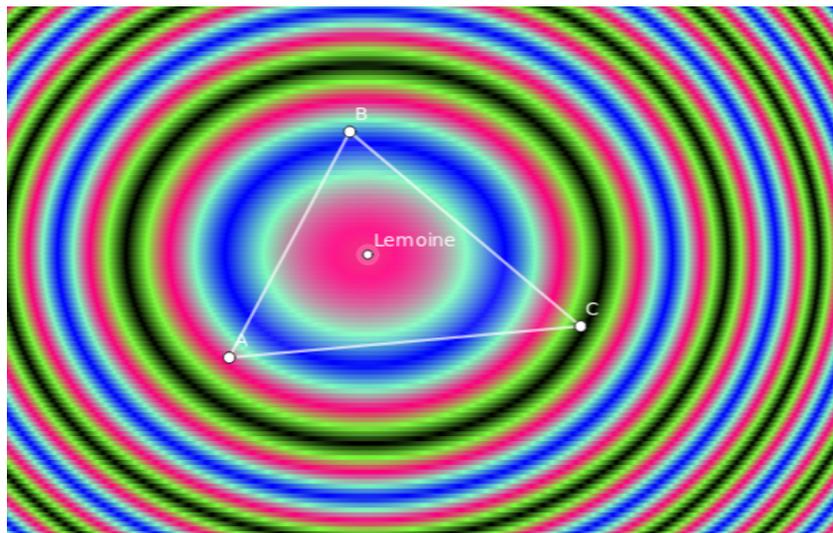
em que $l_{ab} = a_{ab}x + b_{ab}y + c_{ab}$, $l_{ac} = a_{ac}x + b_{ac}y + c_{ac}$ e $l_{bc} = a_{bc}x + b_{bc}y + c_{bc}$ são as funções que utilizam a equação de distância de ponto às retas que contém os segmentos AB , AC e BC . A função de duas variáveis que fornece a soma das distâncias requerida pode ser vista como a soma das superfícies quadráticas l_{ab}^2 , l_{ac}^2 e l_{bc}^2 como segue:

$$f_C(x, y) = \frac{l_{ab}^2}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{l_{ac}^2}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{l_{bc}^2}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}$$

em que $l_{ab}^2 = (a_{ab}x + b_{ab}y + c_{ab})$, $l_{ac}^2 = (a_{ac}x + b_{ac}y + c_{ac})$ e em que $l_{bc}^2 = (a_{bc}x + b_{bc}y + c_{bc})$.

A Figura 12 mostra um esquema de cores dinâmicas seguindo o padrão adotado nos itens anteriores. O ponto de *Lemoine*, denotado pelo número de Kimberling $X(6)$ na Enciclopédia de Centros de Triângulos [1], foi obtido diretamente no GeoGebra. A análise das curvas concêntricas induz ao ponto de Lemoine.

Figura 12: Cores dinâmicas para a soma das distâncias de um ponto qualquer às retas que contém os lados do triângulo $\triangle ABC$. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

Analogamente à seção 4, a solução analítica pode ser obtida por meio de procedimento padrão de Cálculo Diferencial e Integral. O sistema de equações produzido pela imposição de $\nabla f_C = 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot l_{ab} \cdot a_{ab}}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{2 \cdot l_{ac} \cdot a_{ac}}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{2 \cdot l_{bc} \cdot a_{bc}}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2} &= 0 & \Rightarrow & \begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases} \\ \frac{2 \cdot l_{ab} \cdot b_{ab}}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{2 \cdot l_{ac} \cdot b_{ac}}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{2 \cdot l_{bc} \cdot b_{bc}}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2} &= 0 \end{aligned}$$

em que $a_{11} = a_{ab} \cdot \alpha_{ab} + a_{ac} \cdot \alpha_{ac} + a_{bc} \cdot \alpha_{bc}$, $a_{12} = b_{ab} \cdot \alpha_{ab} + b_{ac} \cdot \alpha_{ac} + b_{bc} \cdot \alpha_{bc}$, $a_{22} = a_{ab} \cdot \beta_{ab} + a_{ac} \cdot \beta_{ac} + a_{bc} \cdot \beta_{bc}$, $\alpha_{ab} = a_{ab}/(a_{ab}^2 + b_{ab}^2)$, $\alpha_{ac} = a_{ac}/(a_{ac}^2 + b_{ac}^2)$, $\alpha_{bc} = a_{bc}/(a_{bc}^2 + b_{bc}^2)$, $\beta_{ab} = b_{ab}/(a_{ab}^2 + b_{ab}^2)$, $\beta_{ac} = b_{ac}/(a_{ac}^2 + b_{ac}^2)$, $\beta_{bc} = b_{bc}/(a_{bc}^2 + b_{bc}^2)$, $b_1 = c_{ab} \cdot \alpha_{ab} + c_{ac} \cdot \alpha_{ac} + c_{bc} \cdot \alpha_{bc}$ e $b_2 = c_{ab} \cdot \beta_{ab} + c_{ac} \cdot \beta_{ac} + c_{bc} \cdot \beta_{bc}$. A solução (x_s, y_s) pode ser obtida diretamente pela Regra de Cramer e é dada por:

$$x_s = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \quad \text{e} \quad y_s = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \quad (12)$$

A verificação de que (12) fornece um valor mínimo para a função f_C pode ser feito por

meio da avaliação do determinante da matriz Hessiana, $|H| = \det(H) = \frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f_C}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f_C}{\partial x \partial y}\right)^2$ avaliada em (12):

$$|H| = 4 \left(\frac{a_{ab}^2}{\alpha_{ab}} + \frac{a_{ac}^2}{\alpha_{ac}} + \frac{a_{bc}^2}{\alpha_{bc}} \right) \cdot \left(\frac{b_{ab}^2}{\beta_{ab}} + \frac{b_{ac}^2}{\beta_{ac}} + \frac{b_{bc}^2}{\beta_{bc}} \right) - \left(2 \left(\frac{a_{ab} \cdot b_{ab}}{\beta_{ab}} + \frac{a_{ac} \cdot b_{ac}}{\beta_{ac}} + \frac{a_{bc} \cdot b_{bc}}{\beta_{bc}} \right) \right)^2.$$

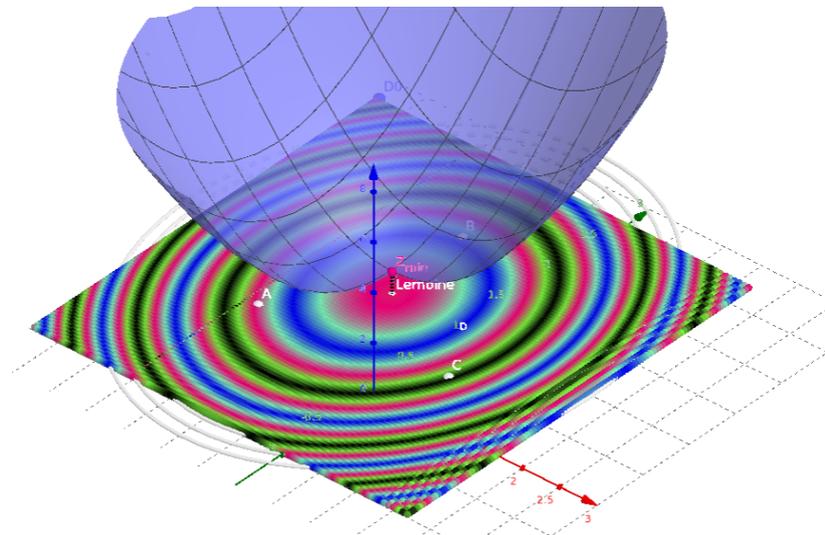
Colocando $u = \left(\frac{a_{ab}}{\sqrt{\alpha}}, \frac{a_{ac}}{\sqrt{\alpha}}, \frac{a_{bc}}{\sqrt{\alpha}} \right)$, $v = \left(\frac{b_{ab}}{\sqrt{\alpha}}, \frac{b_{ac}}{\sqrt{\alpha}}, \frac{b_{bc}}{\sqrt{\alpha}} \right)$, segue pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que a expressão $|H|$ pode ser reescrita como:

$$|H| = 4 \cdot \left((u, u) \cdot (v, v) - (u, v)^2 \right) \geq 0 \quad (13)$$

A igualdade ocorre quando os vetores u e v são proporcionais. Neste caso, as equações das retas são $x + \lambda y = c_{ab}/a_{ab}$, $x + \lambda y = c_{ac}/a_{ac}$ e $x + \lambda y = c_{bc}/a_{bc}$. Por consequência, $H > 0$, pois um triângulo não degenerado é considerado. Como $H > 0$ e $\frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2} > 0$, então o ponto de Lemoine é um ponto de mínimo.

A Figura 13 mostra a superfície f_C e engloba a Figura 12 no plano XY juntamente com as curvas de nível sobrepostas e o ponto Z_{min} .

Figura 13: Superfície parcial de f_C com destaque para o ponto de mínimo, o triângulo ΔABC no plano XY e curvas de nível. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

Uma análise dos valores mínimos sujeitos às restrições pode ser efetuada seguindo a proposta dos problemas anteriores.

8 CONCLUSÕES

Neste artigo, três problemas envolvendo a minimização de quantidades geométricas foram explorados por meio da combinação de elementos distintos: cores dinâmicas, funções de duas variáveis e geometria plana. Esta visualização propicia a observação de um aspecto lúdico da Matemática que, por sua vez, é traduzida no equacionamento e soluções precisas por meio de uma variedade de possibilidades. Os problemas utilizados fazem parte da literatura e espera-se que os elementos apresentados proporcionem uma visualização mais abrangente do tema ou, no mínimo interessante, do ponto de vista do ensino ou da exploração dos problemas de minimização. É notável que problemas com mais variáveis não possam ser tratados por tais argumentos, mas a visualização inicial para a consequente exploração de problemas mais complexos pode ser um ponto chave no processo de aprendizagem. Por fim, o apelo computacional e facilidade de utilização dos elementos envolvidos podem atrair interesse do público estudante e docente.

REFERÊNCIAS

- [1] C. Kimberling, *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers–ETC*. Disponível em: <<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>>. Acesso em: 07 de setembro de 2021.
- [2] A.C.M. Neto, *Geometria*. SBM, 2013. (Seção 2).
- [3] J.L. Linares, J.P.M. Santos and A.F. Jesus, “Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática,” *Revista de Matemática de Ouro Preto*, vol.2, pp. 46-69, 2021.
- [4] Ó.L. Palacios-Vélez, F.J.A. Pedraza-Oropeza and B.S. Escobar-Villagran, “An algebraic approach to finding the Fermat–Torricelli point,” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 46, no. 8, pp. 1252-1259, 2015. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1036947>
- [5] T. Andreescu, O. Mushkarov and L. Stoyanov, *Geometric Problems on Maxima and Minima*. Birkhauser, 2006.
- [6] GeoGebra Team, *What is GeoGebra?, GeoGebra for Teaching and Learning Math Free digital tools for class activities, graphing, geometry, collaborative whiteboard and more*. [Website]. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 02 de setembro de 2021.
- [7] GeoGebra Team, *GeoGebra Manual: Scripting*. [Website]. Disponível em: <<https://wiki.geogebra.org/en/Scripting>>. Acesso: em 02 de Setembro de 2021.
- [8] GeoGebra Team, *GeoGebra Classic Manual*. Disponível em: <<https://wiki.geogebra.org/en/Manual>>. Acesso em: 02 de setembro de 2021.
- [9] R. Losada, “El color dinámico de GeoGebra,” *La Gaceta de la RSME*, vol. 17, no. 3, pp. 525-547, 2014.
- [10] J. Hall, T. Lingefjärd, *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*. New Jersey: John Wiley&Sons, 2017.
- [11] GeoGebra Tem, *GeoGebra Manual: SetColor Command*. [Website]. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/en/SetColor_Command>. Acesso em: 04 de setembro de 2021.
- [12] S. Costa and E. Sebastiani, “Onde morar? O problema de minimizar redes de comunicação,” *Revista do Professor de Matemática*, no. 16, pp. 41-46. 1990. Disponível em: < <https://www.rpm.org.br/cdrpm/16/9.htm>>. Acesso em: 07 setembro de 2021.

- [13] R. Kapitanovas, *Coordenadas Baricêntricas e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do ABC, Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, 2013. Disponível em: <http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=48109>. Acesso em: agosto de 2021.
- [14] J. L. Linares, *Baricentro*. 2020. [Website]. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/czpcsgbx>. Acesso em: 06 de Setembro 2021.

BREVE BIOGRAFIA



João Paulo Martins dos Santos  <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2006), mestre em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2009) e Doutor em Ciências pela Escola de Engenharia de São Carlos - EESC-USP. É professor Adjunto na Academia da Força Aérea em Pirassununga/SP. Tem experiência na área de Sistemas Dinâmicos não lineares e não ideais com pesquisa desenvolvida em métodos de perturbação. Tem experiência na área de Matemática Aplicada e interesse nos seguintes temas: método numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, estimador de erro do tipo residual para a equação do transporte de poluentes, linguagem Python de programação, Computação Científica em Python e métodos numéricos para solução de sistemas lineares.



Alessandro Firmiano de Jesus  <https://orcid.org/0000-0002-7073-2261>

Possui graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo (1994), mestrado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (1997), doutorado em Engenharia Hidráulica e Saneamento pela Universidade de São Paulo (2010) e pós doutorado pela Fachhochschule Köln - Cologne University of Applied Sciences (2014). Atualmente é regime jurídico único da Academia da Força Aérea AFA exercendo a função de Prof. Associado IV. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Modelagem Computacional e Análise Numérica, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelos de advecção-difusão-reação, Método dos Elementos Finitos, Transporte de Contaminantes em Águas Subterrâneas e Geocomputação. Coordenador da Área de Ciências Exatas no Curso de Formação de Oficiais da Aeronáutica na Academia da Força Aérea (AFA).



Juan López Linares  <https://orcid.org/0000-0002-7073-2261>

É professor de Matemática do departamento de Ciências Básicas da FZEA-USP, Universidade de São Paulo (em Pirassununga). Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e resolução de problemas de Olimpíadas Científicas para estudantes e professores do Ensino Fundamental e Médio. Participa como coordenador de um Polo de Treinamento Intensivo em Matemática (POTI-Pirassununga). Possui graduação (1994) e mestrado (1996) em Física na Universidade da Havana, em Cuba, Diploma em Física da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física de Trieste na Itália (1998), doutorado em Física pela Universidade Federal de São Carlos (2001), quatro anos de pós-doutorado no I. de Física da Unicamp (2001-2005) e é mestre em Matemática (PROFMAT) na UFSCar (2019).



Marcos P. O. Ramalho de Freitas  <https://orcid.org/0000-0001-7953-781X>

Possui graduação em MATEMÁTICA, na modalidade Licenciatura, pela Universidade Federal Fluminense (1999). Especialização em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras (2007). Mestrado em Matemática pela Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF (2015), através do PROFMAT - Mestrado em Matemática em Rede Nacional. Atuou como Diretor de Ensino do IF Sudeste MG - Campus Muriaé no período de setembro de 2015 a janeiro de 2021. Atualmente, além das atividades docentes realizadas no campus Muriaé, exerce a função de coordenador do Curso PROEJA FIC Secretariado, realizado em parceria com a SME da Prefeitura de Muriaé.