DOI: 10.22481/intermaths.v2i1.7429
Licença Creative Commons
Artigo | Article

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 1, Jan - Jul 2021, p. 71 – 87

Um estudo histórico e epistemológico sobre o objeto matemático Simetria Ortogonal

Cleusiane Vieira Silva

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

cleusianesilva@gmail.com

Saddo Ag Almouloud

Universidade Federal do Pará

saddoag@gmail.com

A historical and epistemological study on the mathematical object Orthogonal Symmetry

Abstract
This work is an excerpt from an already completed doctoral thesis, in which we conducted a study on the mathematical object Geometric Transformations in the plane, more specifically on Orthogonal Symmetry. Initially, we present some elements of the historical and epistemological development of Geometric Transformations in the plane, followed by the importance of the group of geometric transformations in the classification of geometries and, finally, a study on orthogonal symmetry. The aim of this study was to understand the mathematical object Orthogonal Symmetry from both a historical and epistemological point of view, for this, it was necessary to cover a larger field of knowledge. The article favors the understanding of the importance of teachers and future mathematics teachers to understand Orthogonal Symmetry not only as symmetry in the object, in which the role of the axis of symmetry in geometric figures, its characteristics in elements of nature and its influence in the art world, but also the mathematical object Orthogonal Symmetry in which its definition and mathematical properties must be studied.

Key words: Geometric Transformations; Mathematical Object; Orthogonal Symmetry.

Resumo
Este trabalho é um recorte de uma tese de doutorado já concluída, em que realizamos um estudo sobre o objeto matemático Transformações Geométricas no plano, mais especificamente sobre a Simetria Ortogonal. Inicialmente, apresentamos alguns elementos do desenvolvimento histórico e epistemológico das Transformações Geométricas no plano, seguido pela importância do grupo das Transformações Geométricas na classificação das geometrias e, por fim, um estudo sobre a simetria ortogonal. O objetivo desse estudo era compreender o objeto matemático Simetria Ortogonal tanto do ponto de vista histórico quanto epistemológico, para isso, foi necessário abranger um campo de conhecimento maior. O artigo favorece o entendimento da importância de professores e futuros professores de matemática compreenderem a Simetria Ortogonal não apenas como a simetria no objeto, em que se explora o papel do eixo de simetria em figuras geométricas, suas características em elementos da natureza e sua influência no mundo das artes, mas também o objeto matemático Simetria Ortogonal em que se deve estudar sua definição e propriedades matemáticas.

Palavras-chave: Transformações Geométricas; Objeto Matemático; Simetria Ortogonal.

Submetido em: 29 de setembro de 2020 – **Aceito em**: 06 de maio de 2021

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da geometria tem como um dos fundamentos a necessidade de entender o mundo que nos cerca. Entre outras hipóteses, segundo [1, p. 5], "o desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação à configuração e ordem". Esse autor, ainda exemplifica essa preocupação estética ao citar a presença de padrões geométricos em potes, cestas e tecidos que expressavam exemplos de congruência e simetria.

Ainda sobre esta busca de padrões Fedorov[1], um cristalógrafo que estudou grupos espaciais cristalográficos, afirma, segundo [2], que o cérebro humano sempre busca por regularidade em tudo e que isso é compreensível, porque um homem pode ser orientado em sua busca para um trabalho adequado, considerando apenas materiais agrupados regularmente.

Além de necessidades humana concretas, sentimentos estéticos e no mundo das artes, o desenvolvimento das Transformações Geométricas se deu principalmente por motivos internos ao desenvolvimento da matemática. Ao escolhermos a Simetria Ortogonal como objeto matemático em nosso investigação[2], houve a necessidade de estudá-lo de forma profunda. O que apresentaremos nesse artigo é um recorte dessa pesquisa.

A visão das figuras geométricas, levando em conta seus elementos particulares e a possibilidade de essas serem transformadas por meio da manipulação de suas propriedades, foi estudada na geometria projetiva.

2 A GEOMETRIA PROJETIVA E SEUS PRECURSORES

Sobre o aparecimento e a evolução da noção de transformações geométricas propriamente ditas, [3, p. 32] pontua que "os problemas de representação dos objetos no espaço e os problemas de sombra foram preocupações de pintores e artistas do *Quattrocento*[3] que os conduziu ao método das transformações e à geometria projetiva". Segundo [4], famílias aristocráticas italianas patrocinavam artistas e poetas que estudavam trabalhos dos mestres gregos e italianos antigos. Dentre os artistas do renascimento podemos citar Leonardo da Vinci (1452-1519), Michelangelo (1475-1564), Benvenuto Cellini (1500-1571), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Dürer (1471-1528) e Sandro Botticelli (1445-1510). As obras do Renascimento têm, como característi-

[1] Evgraf Stepanovich Fedorov foi um matemático russo, cristalógrafo e mineralogista. Ele escreveu o clássico "A simetria de sistemas regulares de figuras", em 1891, que continha a primeira catalogação dos 230 grupos espaciais, também de forma independente classificada pelo matemático alemão Schönflies e o geólogo inglês William Barlow.

[2] Ver tese de doutoramento [5]

[3] Foram eventos culturais e artísticos do século XV na Itália que marcaram o início do renascimento.

cas principais, a simetria, a preocupação com a harmonia e com o equilíbrio, seja ela uma pintura ou uma escultura. Procurando dar mais realismo e naturalidade para suas obras, os artistas introduziram conceitos como ponto de fuga[4] e perspectiva.

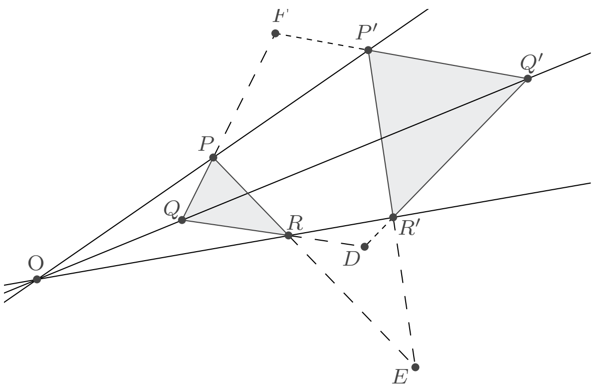
Em sua obra "Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie", Chasles (1793-1880) cita como os trabalhos de Desargues (1591-1661), principalmente sua obra sobre seções cônicas, influenciou com aspectos da geometria projetiva alguns artistas do Renascimento. Este autor afirma que, "Desargues se ocupou das aplicações da Geometria para as artes, e tratou este assunto em relação ao homem superior, trazendo, com uma exatidão frequentemente desconhecida dos artistas, os princípios da universalidade que fazem reconhecer nele [em seu trabalho] pesquisas de pura geometria". [6, p. 84]

Um dos trabalhos mais conhecidos de Desargues, e que deu início aos estudos que levaram à geometria projetiva é o teorema que traz o seu nome, apresentado juntamente com sua demonstração por [7] da seguinte forma:

Teorema de Desargues no plano: *Se dois triângulos estão em perspectiva em relação a um ponto e se as retas suportes de seus pares de lados correspondentes se cortam, então os três pontos de concorrência são colineares.*

Demonstração: Dados dois triângulos PQR e $P'Q'R'$ em perspectiva[5] em relação a um ponto O (ver Figura 1) tal que $\overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{Q'R'} = \{D\}$, $\overleftrightarrow{QP} \cap \overleftrightarrow{Q'P'} = \{F\}$ e $\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{P'R'} = \{E\}$. Agora, devemos mostrar que os pontos D, E e F são colineares.

Figura 1: Representação do Teorema de Desargues



Fonte: Figura elaborada pela autora, baseada em [7].

A demonstração aqui apresentada depende do Teorema de Menelau[6] enunciado

[4]O ponto de fuga é a convergência de todas as linhas que representam planos perpendiculares à tela para um ponto produzindo um efeito real de profundidade. Como exemplo, podemos citar a observação dos trilhos de um trem que dá a origem a um ponto na linha do horizonte.

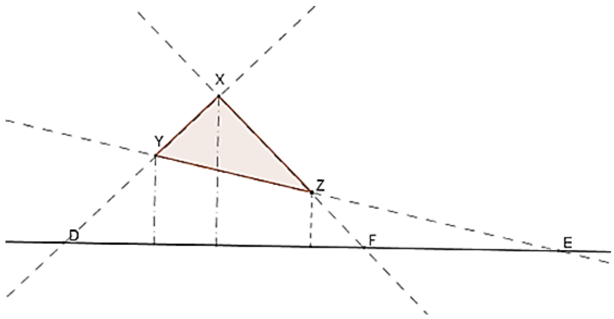
[5]Segundo [7] dois triângulos XYZ e $X'Y'Z'$ no plano estão em perspetiva em relação a um ponto P se $\overleftrightarrow{XX'} \cap \overleftrightarrow{YY'} \cap \overleftrightarrow{ZZ'} = \{P\}$.

[6]Menelau de Alexandria (70 d. C - 140 d. C) foi astrônomo e matemático grego que viveu, possivelmente, em Alexandria, Egito e Roma.

como “os pontos E, F, D pertencentes às retas suportes dos lados YZ, XZ e XY, do triângulo XYZ, são colineares, se e somente se

$$\frac{YE}{ZE} \cdot \frac{ZF}{XF} \cdot \frac{XD}{YD} = 1''.$$

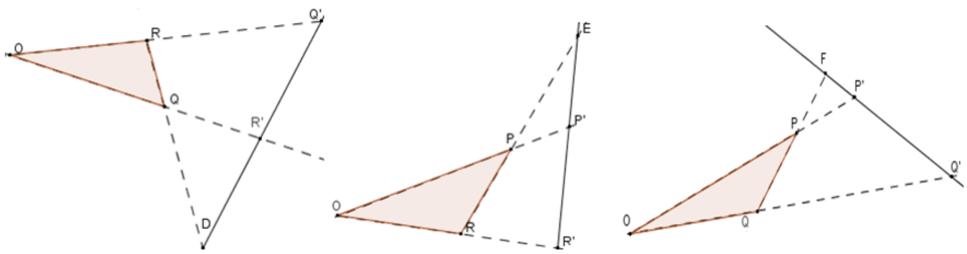
Figura 2: Representação do Teorema de Menelau



Fonte: Figura elaborada pela autora, baseada em [7]

Vamos aplicar o Teorema de Menelau nos triângulos OQR, ORP e OPQ para as três tríades de pontos colineares $\{D, R', Q'\}, \{E, P', R'\}$ e $\{F, Q', P'\}$, respectivamente (ver Figura 3).

Figura 3: Exemplo ilustrativo para métodos de transformação de figuras



Fonte: Elaborada pela autora, baseada em [7].

Para cada uma das representações da figura 3, obtemos referentes aos triângulos OQR, ORP e OPQ as relações apresentadas a seguir:

I) $\frac{QD}{RD} \cdot \frac{RR'}{OR'} \cdot \frac{OQ'}{QQ'} = 1$ II) $\frac{RE}{PE} \cdot \frac{PP'}{OP'} \cdot \frac{OR'}{RR'} = 1$ III) $\frac{PF}{QF} \cdot \frac{QQ'}{OQ'} \cdot \frac{OP'}{PP'} = 1$

Após multiplicar as três equações consecutivamente e efetuarmos um número modesto de cancelamentos obtemos:

$$\frac{QD}{RD} \cdot \frac{RE}{PE} \cdot \frac{PF}{QF} = 1,$$

portanto, de acordo com o Teorema de Menelau no triângulo QRP os pontos D, E, e F são colineares. $\square$

Segundo [3], as transformações eram utilizadas como ferramentas de demonstração, na medida em que elas permitiram transferir as propriedades sobre os objetos geométricos mais complexos que aqueles aos quais eram iguais. Ela ainda afirma que este estudo pretendia exibir as propriedades geométricas invariantes no momento das transformações.

Ainda de acordo com [3], as transformações geométricas como um objeto podem ser entendidas em vários níveis. De acordo com a autora, esse objeto pode ser considerado como as relações entre duas configurações geométricas ou entre duas partes de uma mesma configuração, o que pode ser observado quando analisamos figuras decorrentes da Simetria Ortogonal. Os conceitos aparecem, assim, ligados ao contexto das figuras e se trata em determinado momento de uma transformação de figuras.

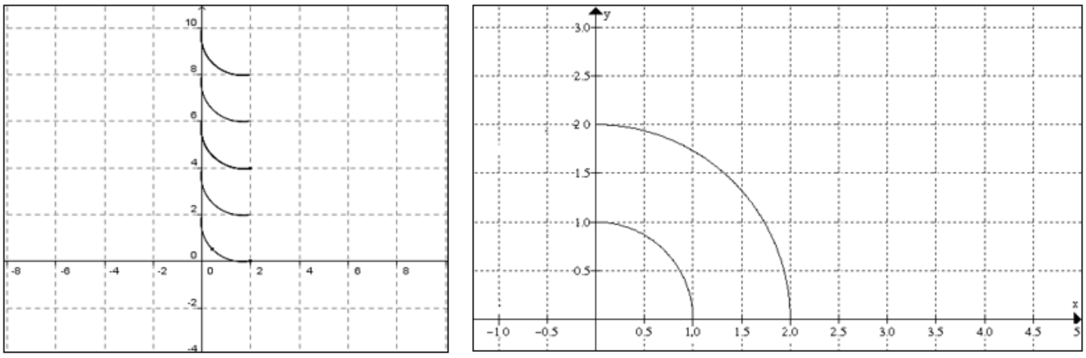
A seguir, discorreremos sobre alguns métodos de transformações de figuras.

3 A GÊNESE DAS PRIMEIRAS TRANSFORMAÇÕES

Sobre a evolução dos métodos para a transformação de figuras, [3] cita como ponto de partida, as numerosas maneiras de originar cônicas sobre o plano, uma pela outra, além de dois processos que, segundo ele, se tornaram muito frequentes nas artes. Esse autor argumenta que o primeiro processo empregado por Stévin (1548-1667) e Mydorge (1585-1647) consistia em fazer crescer, a uma proporção constante, a ordenada de uma curva, e o segundo, em fazer girar essas ordenadas em torno de seus pés, a uma mesma grandeza angular, de forma que permaneçam paralelas entre si.

A seguir, construímos um exemplo que ilustra o primeiro método, e outro para ilustrar o segundo método de transformações de figuras descrito acima.

Figura 4: Exemplo ilustrativo para métodos de transformação de figuras



Fonte: Elaborada pela autora.

Segundo [6], esses processos foram utilizados separadamente ou combinados de diversas maneiras, por Gregoire de St Vicent (1584 - 1667) para transformar o círculo em elipse. Ainda sobre os métodos para transformações de figuras, de acordo com [6], o caso mais simples de um método de deformação de figuras tomou extensão entre as mãos de La Hire (1640 - 1718) e Newton (1643 - 1727). Esse autor ainda declara que Poncelet (1788 - 1867), no seu “tratado das propriedades projetivas”, alargou as figuras para três dimensões, apresentando na segunda parte daquela obra, um dos métodos mais poderosos da geometria moderna intitulada "Deformação Homográfica".

4 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA DE DESCARTES PARA A EVOLUÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

No que tange à geometria de Descartes (1596 - 1650), ao mencionar os métodos criados por Cavalieri (1598 - 1647), Fermat (1601 - 1665), Roberval (1602 – 1675) e Gregoire de St Vincent, [6, p. 95] pondera que "a concepção de Descartes, somente procurou os meios de aplicar estes métodos de uma maneira uniforme e geral, ela foi a introdução necessária aos novos cálculos de Leibniz (1646 - 1716) e de Newton".

Ainda sobre as contribuições da geometria analítica com seus processos algébricos às transformações geométricas, [6, p. 196] questiona: "não seria natural, introduzir, paralelamente, na geometria pura transformações análogas que atingissem diretamente as figuras propostas e as suas propriedades?"

Esse autor ainda observa que

> [. . .] a geometria de Descartes, além de seu caráter eminente de universalidade, distingue-se da geometria antiga por uma relação especial que merece ser notada: é que ela estabelece, por uma única fórmula, as propriedades gerais de famílias inteiras de curvas, de modo que, se não se podem descobrir, por meio dela, algumas propriedades de uma curva particular, pode-se prontamente saber propriedades iguais ou semelhantes para uma infinidade de outras. Até então, ninguém havia estudado propriedades particulares de algumas curvas, tomadas uma a uma, e de maneiras distintas, de modo a não estabelecer qualquer ligação entre as diferentes curvas [6, p. 95].

Nesse sentido, a geometria de Descartes fornece uma nova visão aos métodos de transformações de figuras desenvolvidos até então. Os argumentos de [8, p. 108], são de que "o intervalo de tempo desde Desargues e Pascal até Poncelet e Chasles é o período durante o qual se consolida a geometria analítica, tendo como ponto de apoio as transformações algébricas. As transformações realizam-se através de equações".

Segundo as observações acima, podemos notar que a geometria analítica exerceu um importante papel na evolução dos conceitos relativos às transformações geométricas. Foi com o trabalho de Felix Klein e Sophus Lie que esses conceitos foram formalizados com o rigor matemático.

5 OS TRABALHOS DE FELIX KLEIN E DE SOPHUS LIE

Apesar de os estudos sobre como tornar as propriedades das figuras invariantes por métodos de transformações terem sido alvo de árduo trabalho por mais de dois séculos, foi nas mãos de Felix Klein (1849-1925) e Sophus Lie (1842-1899) que conceitos complexos como a aplicação da teoria de grupos à geometria se desenvolveram.

O resultado dos esforços desses dois pesquisadores culminou com a proposição da teoria de grupos de transformações, resultando na classificação das geometrias.

Felix Klein tornou-se conhecido por meio do Programa Erlanger, considerado como um marco importante na Matemática do século XIX. Segundo [9], a estreita amizade entre Felix Klein e Sophus Lie, no momento do Programa Erlanger, desempenhou um importante papel na vida acadêmica de ambos. Ainda de acordo com [9, p. 146], os trabalhos de Klein e Lie eram complementares; esses autores exemplificam esse fato, dizendo que “Klein chamou a atenção para aspectos globais básicos da geometria, ao passo que os teoremas de Lie eram puramente locais”.

Segundo [4], Klein nasceu em Dusseldorf, estudou em Bonn, Gottingen e Berlin e foi assistente de Julius Plücker (1801-1868), que teve forte influência sobre o seu trabalho. De acordo com [1, p. 379] “a generalidade do conceito de grupo é evidente, Klein numa célebre aula inaugural em 1872, quando se tornou professor em Erlanger, mostrou como podia ser aplicado, como um meio conveniente para caracterizar as várias geometrias que tinham aparecido durante o século”.

Na visão de [7], Felix Klein propôs a classificação das geometrias, de acordo com os grupos de transformações, isto sem alterar conceitos, axiomas e teoremas da geometria euclidiana, considerada, nesse caso, como uma das muitas geometrias. A seguir um pequeno estudo sobre o grupo das transformações[7].

6 O GRUPO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Definição 1 *Uma transformação T no plano Π é uma aplicação $T : \Pi \to \Pi$, isto é, uma correspondência que associa, a cada ponto P do plano, outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, denotado sua imagem por T. Seja Γ um conjunto de transformações sobre o plano Π.*

Uma transformação $T : \Pi \to \Pi$ diz-se injetiva, quando pontos P e Q distintos em Π têm sempre imagens distintas, isto é, $T(P) \neq T(Q)$. Ou, ainda, T é injetiva, quando $T(P) = T(Q)$ implicar em $P = Q$.

Uma transformação T diz-se sobrejetora quando todo ponto P_1 em Π é imagem de pelo menos um ponto P, ou seja, para todo P_1 em Π existe P em Π, tal que $T(P) = P_1$. Sendo assim, uma transformação T que é, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva é dita bijetiva.

Uma transformação bijetiva $T : \Pi \to \Pi$ possui uma inversa $T^{-1} : \Pi \to \Pi$, isto é, para todo ponto P_1 em Π, sua imagem $T^{-1}(P_1)$ pela imagem inversa T^{-1} é o único ponto P de Π, tal que $T(P) = P_1$. Se $T^{-1} \in \Gamma$, dizemos que Γ possui inversa.

[7]Utilizamos como referência para este estudo as obras “Isometrias” [11] e “Um Estudo Geométrico das transformações Elementares” [12].

Finalmente, definiremos uma transformação geométrica como uma aplicação bijetiva do plano nele mesmo. Sendo assim, se F é uma figura (um conjunto de pontos do plano) definiremos $F' = T(F)$ como conjunto das imagens dos pontos de F. Observemos que dessa última e das definições anteriores deriva que toda transformação geométrica possui inversa.

A transformação geométrica $I : \Pi \to \Pi$, definida por $I(P) = P$ para todo ponto P, é chamada transformação identidade. Se $I \in \Gamma$, dizemos que Γ possui identidade.

Dadas duas transformações geométricas $T_1, T_2 : \Pi \to \Pi$, a composta $T_2 \circ T_1 : \Pi \to \Pi$ é a aplicação que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $T_2(T_1(P))$. Portanto, por definição, $(T_2 \circ T_1)(P) = T_2(T_1(P))$, ou seja, $T_2 \circ T_1$ consiste em aplicar primeiro T_1 e em seguida T_2.

Proposição 1 *A composição de duas transformações geométricas é também uma transformação geométrica.*

Como a composição $T_2 \circ T_1$ está em Γ, ou seja, $T_2 \circ T_1$ é uma transformação geométrica quando T_1 e T_2 também o são, dizemos que é um conjunto fechado com relação à composição.

Observamos que os conjuntos importantes de transformações geométricas são aqueles que apresentam identidade, inversa e satisfazem, simultaneamente, as propriedades de fechamento e associatividade. Tais conjuntos são chamados de grupos de transformações geométricas.

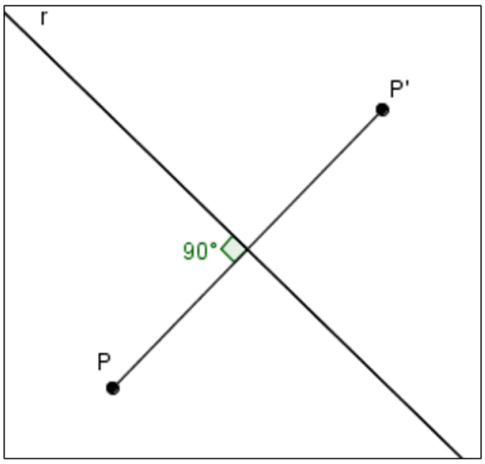
A importância de tais conjuntos, segundo [4, p. 66], deve-se ao fato de Felix Klein definir geometria como "o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo de transformações Γ".

Segundo [7, p. 80], "a geometria euclidiana é caracterizada particularmente pelo grupo das transformações semelhantes. Um caso particular importante das transformações semelhantes são as transformações isométricas". Esse autor, ainda declara que as isometrias nos fornecem a ideia familiar de congruência, já que duas figuras são congruentes se, e somente se, uma pode ser transformada em outra por meio de uma isometria.

7 O OBJETO MATEMÁTICO SIMETRIA ORTOGONAL

Nesta seção, apresentamos nossa motivação para a escolha da simetria ortogonal[8] como objeto matemático a ser estudado. Do ponto de vista geométrico, definimos a Simetria Ortogonal (também designada como simetria axial ou reflexão) da seguinte forma: Seja P um ponto do plano que não pertence à reta r, a imagem de P por esta transformação é um ponto P' tal que r seja a mediatriz do segmento PP'. Por outro lado, se P pertence à reta r, a imagem de P, P' é o próprio ponto P.

Figura 5: Ponto P' simétrico do ponto P em relação à reta r.



Fonte: Elaborada pela autora.

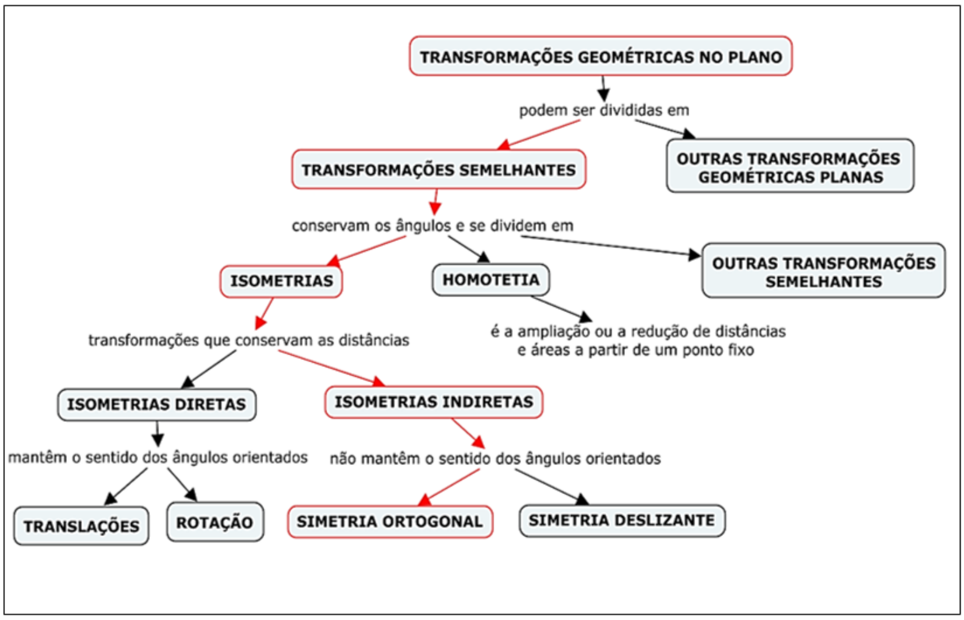
Em resumo, a simetria ortogonal tem como característica as seguintes propriedades:

- Conservação do alinhamento (a imagem de uma reta é uma reta);
- Conservação do paralelismo (quando duas retas r e t são paralelas, suas imagens r' e t' também são paralelas);
- Conservação de distâncias (A imagem de um segmento s é um segmento s' de mesmo comprimento);
- Conservação da área (se uma figura F tem área de medida a sua imagem F' também tem área de medida a);
- Conservação da medida dos ângulos e, portanto, da ortogonalidade.

Com o objetivo de situar a simetria ortogonal nas transformações geométricas planas, construímos a Figura 6, um esquema que leva em consideração algumas das suas propriedades.

[8]Utilizamos como referência as obras, “estudo geométrico das transformações elementares” [13], “El grupo de las isometrías del plano” [12], além de “Coordenadas no plano com soluções dos exercícios” [10].

Figura 6: Transformações Geométricas no plano



Fonte: Elaborada pela autora.

Essas características fazem das isometrias, transformações especiais, uma vez que as relações dessas com outros conteúdos de geometria podem atribuir mais significado ao seu ensino, como exemplo, no caso da simetria ortogonal, em que citamos a classificação de polígonos regulares. Esse foi um dos motivos para escolhermos uma das isometrias no plano, em particular, a simetria ortogonal para o nosso estudo. A escolha desse conceito se dá, ainda, pela sua importância histórica e cultural, como apresentado anteriormente. Além disso, como aponta [14], a simetria ortogonal ocupa um lugar privilegiado entre as Transformações Geométricas no plano. Segundo a autora, a simetria ortogonal é uma isometria indireta, a partir da qual é possível deduzir todas as isometrias do plano.

A seguir, apresentamos dois exemplos de composição de duas simetrias ortogonais, o primeiro resultando numa rotação e o segundo numa translação.

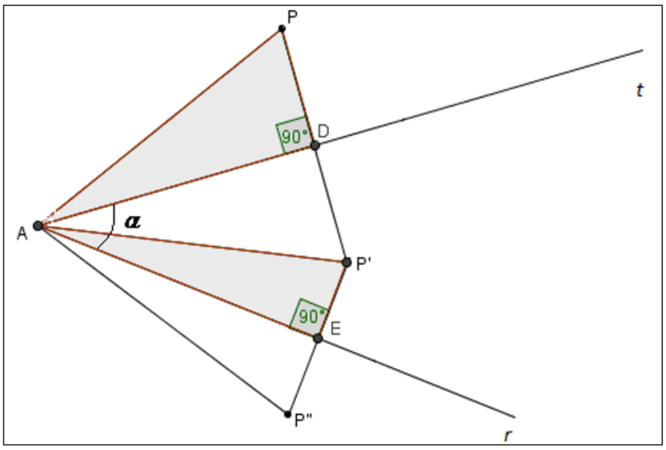
Teorema 1 *Sejam r e t retas concorrentes distintas do plano se interceptando num ponto A e seja α a medida de um dos ângulos orientados da reta t para r. Então $S_r \circ S_t = R(A, 2\alpha)$, onde $R(A, \alpha)$ é a rotação de centro A e ângulo α e S_r, S_t são simetrias em relação às retas r e t.*

Demonstração: Considere a Figura 7, na qual P é o ponto refletido com relação à reta t, a imagem de P é P'. A seguir, P' é refletido com relação à reta r a *imagem* P' é P''. Seja A o ponto de interseção entre as retas r e t; observamos que existem dois pares de triângulos congruentes - os triângulos PAD e $P'AD$ são congruentes pelo critério

LAL (lado, ângulo, lado), pois por construção $\overline{PD} \cong \overline{DP'}$, o lado $\overline{PD}$ é comum aos dois triângulos e $med(P\widehat{D}A) = med(P'\widehat{D}A) = 90^{o}$. Portanto, temos que $P\widehat{D}A \cong P'\widehat{D}A$.

Por um argumento parecido, temos $P'\widehat{A}E \cong E\widehat{A}P''$. Combinando essas duas igualdades, temos $P\widehat{A}P'' \cong P\widehat{A}P' + P'\widehat{A}P'' \cong (P\widehat{A}D + D\widehat{A}P') + (P'\widehat{A}E + E\widehat{A}P'')$, isto é, $P\widehat{A}P'' \cong 2D\widehat{A}P + 2P'\widehat{A}E \cong 2D\widehat{A}E$. Como chamamos de α, o ângulo entre t e r mostramos que $P\widehat{A}P'' = 2\alpha$. Logo: $S_r \circ S_t = R(A, 2\alpha)$. $\square$

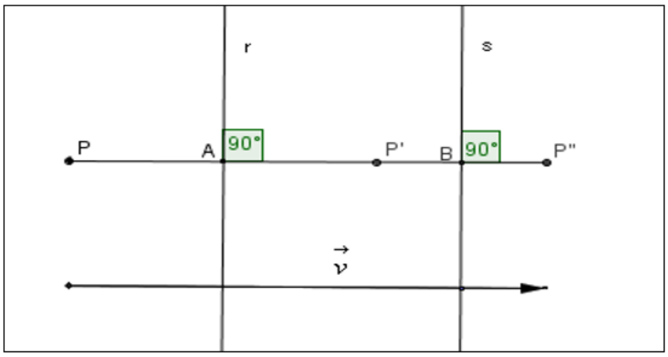
Figura 7: Reflexão do ponto P com relação à reta t e do ponto P' com relação à reta r



Fonte: Elaborada da autora, segundo [12].

Teorema 2 *A composição de duas simetrias ortogonais com relação a eixos de simetria paralelos produz uma translação na direção perpendicular aos eixos de simetria por intermédio de uma distância igual a duas vezes a distância entre os eixos.*

Figura 8: Reflexão do ponto P com relação às retas r e s respectivamente



Fonte: Elaborada da autora, segundo [12].

Demonstração: Considere a Figura 8, na qual as retas r e s são paralelas. Observe que P é o ponto refletido com relação à r, cuja imagem é P'. Observe ainda que P' é o ponto refletido com relação à s, com imagem P''. Então, por construção, temos que

$\overline{PA} \cong \overline{AP'}$ e $\overline{P'B} \cong \overline{BP''}$. Sendo assim, $\overline{PP''} = \overline{PA} + \overline{AP'} + \overline{P'B} + \overline{BP''} = 2\overline{AP'} + \overline{P'B} = 2\overline{AB}$.

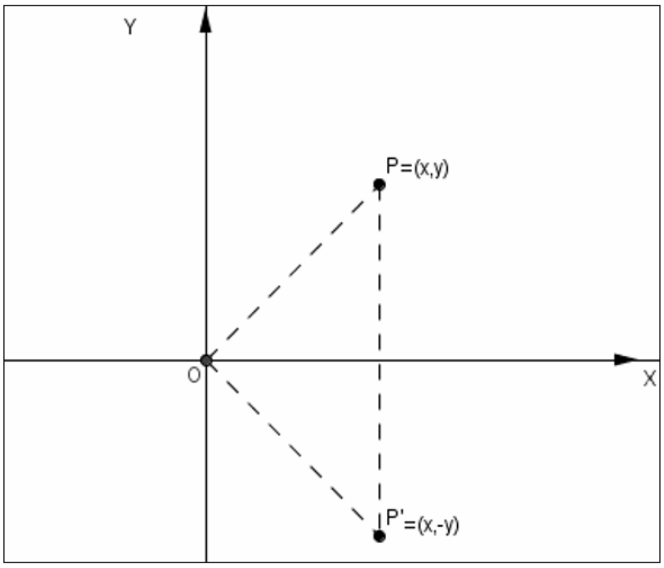
Portanto, chamando de $\vec{v}$ o vetor $\overrightarrow{AB}$ perpendicular aos eixos r e s e cujo módulo é duas vezes a distância entre os mesmos, temos que a composição de duas simetrias ortogonais cujos eixos são paralelos é igual a uma translação.

A possibilidade de produzir todas as isometrias do plano foi mais uma razão do nosso interesse pela simetria ortogonal como o objeto matemático para nosso estudo.

Já destacamos anteriormente a importância da geometria analítica no estudo das transformações de figuras planas. Do ponto de vista algébrico, para definir a simetria ortogonal por meio de equações, devemos observar três casos, em que consideramos um sistema de eixos ortogonais do plano denotado por OXY:

1º) Quando o eixo OX coincide com a reta r (eixo de simetria), observamos para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se que $S_r(P) = P' = (x_1, x_2)$, em que $x_1 = x$ e $y_1 = -y$.

Figura 9: A simetria ortogonal em torno do eixo OX transforma $P = (x, y)$ em $P' = (x, -y)$.

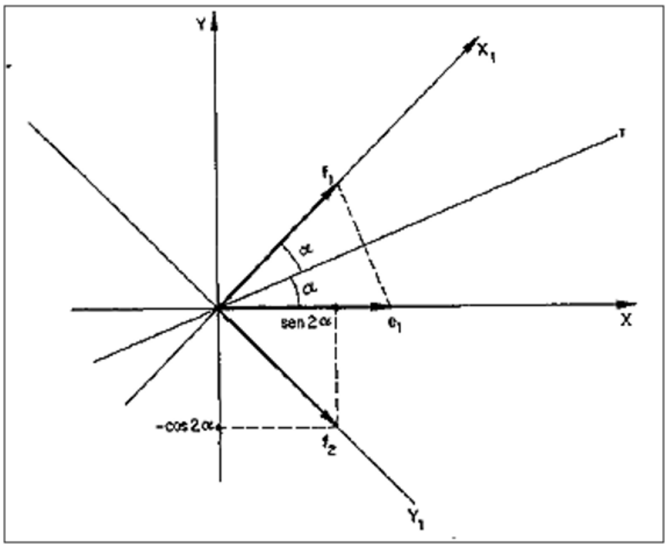


Fonte: Elaborada da autora.

2º) Quando a reta r passa pela origem O e forma um ângulo de medida α com o eixo OX. A simetria ortogonal S_r transforma o eixo OX no eixo OX_1, obtido de OX pela rotação de ângulo 2α e transforma o eixo OY no eixo OY_1, tal que a medida do ângulo de OY para OY_1 é $180^{o} + 2\alpha$.

Considerando $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ os respectivos vetores unitários dos eixos

Figura 10: A simetria com relação à r leva OX em OX_1 e OY em OY_1



Fonte: [10, p. 152].

OX, OY e $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ os vetores unitários de OX_1 e OY_1 tais que:

$$\begin{cases} \vec{f_1} & = & \cos 2\alpha\,\vec{e}_1 + \operatorname{sen} 2\alpha\,\vec{e}_2 \\ \vec{f_2} & = & \operatorname{sen} 2\alpha\,\vec{e}_1 - \cos 2\alpha\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

Observamos que a simetria ortogonal S_r é uma isometria que transforma, por meio de uma mudança de coordenadas, o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $OP_1 = x\vec{f_1} + y\vec{f_2}$. Portanto, com o objetivo de representar o simétrico de $P = (x, y)$ em OXY, utilizamos uma mudança de coordenadas para obter fórmulas que exprimam as coordenada de (x_1, y_1) de P no sistema OX_1Y_1, em função das coordenadas (x, y) de P no sistema original OXY. Substituindo as equações obtidas para $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ na equação anterior obtemos,

$$(x_1, y_1) = (x(\cos 2\alpha\,\vec{e}_1 + \operatorname{sen} 2\alpha\,\vec{e}_2)) + y(\operatorname{sen} 2\alpha\vec{e}_1 - \cos 2\alpha\vec{e}_2).$$

Logo, para a simetria com relação à reta r do tipo $y = ax$ temos as equações:

$$\begin{cases} x_1 & = & x\cos 2\alpha + y\operatorname{sen} 2\alpha \\ y_1 & = & x\operatorname{sen} 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{cases}.$$

Observando que a inclinação da reta r é a tangente trigonométrica do ângulo que essa reta forma com o eixo OX, ou seja, $a = \tan\alpha$, podemos obter por meio da tangente do arco metade, as fórmulas trigonométricas

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \text{ e } \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2a}{1 + a^2}$$

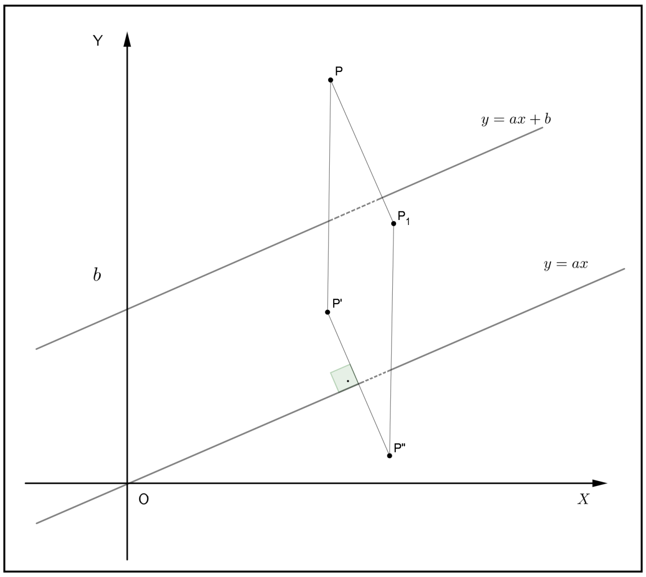
de tal forma que para a simetria com relação à r temos as equações

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}y \\ y_1 &= \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}y \end{cases}$$

em que x_1 e y_1 são expressas em termos de x, y e a.

3º) Quando r é a reta de equação que tem inclinação e corta o eixo OY no ponto de ordenada b, a simetria ortogonal com relação à reta transforma $P = (x, y)$ em $P_1 = (x_1, y_1)$ com etapas intermediárias $P' = (x', y')$ e $P'' = (x'', y'')$.

Figura 11: A simetria com relação à reta leva P em P_1, com etapas intermediárias de P' a P''



Fonte: Elaborada da autora, segundo [10, p. 152].

Para a obtenção das equações para simetria ortogonal S_r onde r é a reta de equação $y = ax + b$ e $a = \tan\alpha$ é utilizada uma translação vertical com relação ao vetor $-\vec{v} = (0, -b)$, cujo objetivo é recair no caso anterior, isto é, fazendo a simetria de $P' = (x, y - b)$ para $P'' = (x'', y'')$ com relação a uma reta r' do tipo $y = ax$ e $a = \tan\alpha$ estabelecendo, assim, as equações

$$\begin{cases} x'' &= x\cos 2\alpha + (y-b)\,\text{sen}\, 2\alpha \\ y'' &= x\,\text{sen}\, 2\alpha - (y-b)\cos 2\alpha \end{cases}.$$

Uma segunda translação na direção do vetor $\vec{v} = (0, b)$, é utilizada para obter o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ e estabelecer as equações

$$\begin{cases} x_1 &= x\cos 2\alpha + (y-b)\,\mathrm{sen}\,2\alpha \\ y_1 &= x\,\mathrm{sen}\,2\alpha - (y-b)\cos 2\alpha + b \end{cases}$$

que são as coordenadas do ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, obtido do ponto $P = (x, y)$, pela simetria ortogonal com relação a reta r do tipo $y = ax + b$ com $a = \tan\alpha$.

Exprimindo x_1 e y_1 em termos de x, y e a como fizemos no caso anterior obteremos

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}(y-b) \\ y_1 &= \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) + b \end{cases}$$

A apresentação da simetria ortogonal no quadro algébrico permitiu-nos observar as conexões entre os aspectos geométricos e algébricos desse conteúdo, além da possibilidade de estabelecer relações com outros conteúdos de matemática.

Finalizamos esta sessão observando que estudos franceses [3, p. 60] descrevem as transformações geométricas em três níveis de significação.

- Nível 1 - A transformação é considerada como uma relação entre duas configurações geométricas ou uma relação entre duas partes de uma mesma configuração (a característica funcional é ausente).
- Nível 2 - A transformação é considerada como uma aplicação pontual do plano sobre ele mesmo (se trata do objeto funcional).
- Nível 3 - A transformação é considerada com uma ferramenta funcional, a fim de colocar em evidência os invariantes ou para fins de resolução problema.

Além desses, um 4º nível evidenciado nos estudos de [3, p. 60] também foi detectado por nós. Segundo essa autora “a transformação é considerada como o elemento de um grupo (as transformações se compõem e se comparam, elas formam o grupo das transformações).”

8 CONCLUSÕES

O breve estudo histórico e epistemológico realizado ajudou-nos a compreender que a simetria ortogonal, apresentada como uma Transformação Geométrica no plano, que está inserida em um conjunto com propriedades específicas (o grupo das transformações), reveste o professor de uma série de conhecimentos necessários à sua formação profissional. Esses conhecimentos possibilitam ao professor utilizar a Simetria Ortogonal como ferramenta para estabelecer relações entre vários conceitos geométricos, além de auxiliá-lo na busca de estratégias de ensino, cujo objetivo seja tornar a aprendizagem, de fato, efetiva e significativa para o aluno.

Além disso, o estudo sobre o surgimento e desenvolvimento das Transformações Geométricas mostrou a necessidade de investigar a importância das criações humanas (artísticas), principalmente, no ensino da Simetria Ortogonal. O estudo expôs, ainda, a importância de se observar o enfoque dado nos livros didáticos e as relações matemáticas propostas, quando se leva em conta o ensino de Transformações Geométricas no plano, de forma específica, sobre o ensino da Simetria Ortogonal.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, C.B. História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide, 2ª ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

[2] GALIULIN, R. V. To the 150th Anniversary of the Birth of Evgraf Stepanovich Fedorov (1853–1919): Irregularities in the Fate of the Theory of Regularity. Crystallography Reports, Vol. 48, n. 6, p. 899–913. Moscou, Rússia, 2003.

[3] JAHN, A. P. Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre II. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde. 1998. Tese (doutorado em Didática da Matemática). Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França. 1998.

[4] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp. 3ª edição. Campinas, São Paulo. 2002.

[5] SILVA, C. V. A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da simetria ortogonal. 2015. 322 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo, 2015.

[6] CHASLES, M. Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Secunde Edition. Gauthier-villars, imprimeur libraire, 1875. Paris. França.

[7] COXETER, H. S. M; GREITZER, S. L. Geometry Revisited. The Mathematical Association of America. Washington. USA. 1967.

[8] PIAGET, J; GARCIA, R. Psicogênese e história das ciências. Trad. Maria Fernanda de Moura Rebelo Jesuíno, 1ª ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

[9] BIRKHOFF, G. BENNETT, M. K. Felix Klein and his Erlanger Programm. History and philosophy of modern mathematics, 145-176, Minnesota Stud. Philos. Sci. XI, Univ. Minnesota Press, Minneapolis, MN, 1988.

[10] LIMA, E. L. Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[11] LIMA, E. L. Isometrias. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[12] PASTOR, A. J.; RODRIGUES, A. G. El grupo de lãs Isometrias del Plano. Coleção Educacíon Matemática em secundaria. Editorial Síntesis. Espanha, 1995.

[13] ALVES, S.; GALVÃO, M. E. E. L. Um estudo geométrico das transformações elementares. São Paulo: IME/USP. 1996.

[14] GRENIER, D. Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixiême. 1988. Tese (doutorado em Didática da Matemática). Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França, 1988.

BREVE BIOGRAFIA

Cleusiane Vieira Silva https://orcid.org/0000-0002-7156-2276

Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP (2015) e Professora Adjunta da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia desde 2007. Líder do grupo de pesquisa “Ensino de geometria” GEPEM.

Saddo Ag Almouloud https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Doutor em mathematiques et applications - université de Rennes i. Professor colaborador da UFPA. É bolsista de pesquisa e produtividade do CNPq, editor chefe da revista educação matemática pesquisa do PEPG em educação matemática da PUC-SP e parecerista de várias revistas cientificas na área de educação matemática.