DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.9487
Licença Creative Commons
Artigo | Article

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 2, Jul - Dez 2021, p. 91 – 105

Diferentes abordagens para calcular integrais reais

Marina Lima

Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil

marina@ime.unicamp.br

Edmundo Capelas de Oliveira

Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil

capelas@unicamp.br

Different approaches to calculate real integrals

Abstract
We present three distinct ways to approach a real integral, a class of integrals, since the integral depends on two parameters. The first way uses a general result, a theorem; the second way, complex variables, through of the residue theorem and Jordan's lemma, while the third way, an artifice through real functions, without using the complex plane. The goal is to make the student choose the best way to approach this class of integrals, or possibly, propose another different way.

Keywords: Residue Theorem; Jordan's Lemma; Analytical Functions; Real Integrals.

MSC: 30E20; 40C10; 97I50.

Resumo
Apresentamos três distintas maneiras de abordar uma integral real, uma classe de integrais, pois a integral depende de dois parâmetros. A primeira maneira utiliza um resultado geral, um teorema; a segunda as variáveis complexas, através do teorema dos resíduos e o lema de Jordan, enquanto a terceira maneira consiste em um artifício por meio de funções reais, sem utilizar o plano complexo. O objetivo é fazer com que o estudante escolha a melhor forma de abordar essa classe de integrais, ou eventualmente, propondo uma outra maneira diferente.

Palavras-chave: Teorema dos Resíduos; Lema de Jordan; Funções Analíticas; Integrais Reais.

Submetido em: 09 de fevereiro de 2021 – **Aceito em**: 09 de dezembro de 2021

1 INTRODUÇÃO

Numa disciplina envolvendo funções analíticas, o cálculo de integrais reais, via teorema dos resíduos e o lema de Jordan, desempenha papel crucial, em particular com vistas às transformadas integrais, sendo estas uma metodologia para obtenção de uma particular solução de equações diferenciais. Nas clássicas transformadas de Fourier, Laplace e Mellin, as funções analíticas emergem naturalmente quando devemos calcular a respectiva transformada inversa.

Em uma particular aula sobre o emprego de integração complexa para calcular integrais reais, surgiu a interpelação de um estudante querendo saber se tais integrais reais não poderiam ser calculadas sem o uso das funções analíticas, em analogia ao cálculo de várias outras integrais reais. A resposta de imediato foi, para algumas integrais reais, sim, esse é o caso e mencionei o clássico exemplo, pois, quando estamos estudando as integrais impróprias, a primeira integral que costumamos discutir é

$$\mathbf{J} \equiv \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{1}$$

que é calculada através da mundaça de variável $x = \tan\theta$. Essa mesma integral serve como um primeiro exemplo de integração utilizando o plano complexo, onde o integrando apresenta duas singularidades do tipo polo. Assim, utilizando o teorema dos resíduos e o lema de Jordan somos levados ao mesmo resultado obtido como uma integral imprópria, a saber $\pi/2$.

Após essa disciplina e a pertinente interpelação do estudante, passei a bonificar sempre que emergisse uma solução alternativa, no sentido de ser diferente como, por exemplo, na integral mencionada, calculada via mudança de variável real, no caso trigonométrica, e o teorema dos resíduos junto ao lema de Jordan. Diante disso e da destreza de vários estudantes, não demorou muito para aparecer uma outra maneira, distinta das duas anteriores envolvendo a derivada num parâmetro de uma função convenientemente introduzida no integrando.

O objetivo central do trabalho é a discussão de abordagens diferentes do cálculo de uma integral real, cujo integrando está associado a uma particular classe de funções, através de três maneiras distintas, visando motivar os estudantes a, na medida do possível, decidirem por uma dessas maneiras para a abordagem da integral e, eventualmente, propor uma alternativa. A integral $\mathbf{J}$ será recuperada como caso particular.

O trabalho está disposto da seguinte maneira: na Seção 2, introduzimos os conceitos necessários, numa sequência natural visando, ao final, o teorema dos resíduos. Na Seção 3, primeiro, através do plano complexo, apresentamos um teorema que é utilizado no cálculo de uma integral real e, logo após, a mesma integral discutida de duas outras maneiras, com uma conveniente mudança de variável e uma substituição por meio de um artifício.

2 PRELIMINARES

Nesta seção, introduzimos a notação a ser utilizada. Ainda que não seja uma revisão da teoria das funções analíticas, apresentamos o necessário, a fim de concluir com o teorema dos resíduos, pois é um conceito fundamental no cálculo de integrais reais via funções analíticas. As demonstrações dos teoremas podem ser encontradas em livros que abordam a teoria das funções analíticas, dentre os quais mencionamos [1],[2],[3] e [4].

No texto, vamos considerar $x, y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, sendo $z = x + iy$; $k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}$ e α, θ, μ parâmetros complexos.

Teorema 2.1. *A função $f(z) = u + iv$ com $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ é dita diferenciável no ponto $z = x + iy$, numa região do plano complexo, se, e somente se, as derivadas parciais de primeira ordem u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

em $z = x + iy$.

Definição 2.2. *Uma função $f(z)$ é analítica num ponto z_0 se $f(z)$ é diferenciável em uma vizinhança de z_0. A função $f(z)$ é analítica em uma região, $\mathcal{R}$, se ela é analítica em todo ponto de $\mathcal{R}$.*

Definição 2.3. *Chama-se função inteira a toda função que é analítica em todo o plano complexo.*

Definição 2.4. *Um conjunto $\mathscr{C}$ de pontos $z = (x, y)$ do plano complexo é uma curva se $x = x(t)$ e $y = y(t)$, com $a \leq t \leq b$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas do parâmetro real t. Escrevemos $z = z(t)$, com $a \leq t \leq b$, sendo $z(t) = x(t) + iy(t)$.*

Definição 2.5. *Uma curva simples ou curva de Jordan é uma curva que não se intercepta, $z(t_1) \neq z(t_2)$ quando $t_1 \neq t_2$.*

Definição 2.6. *Uma curva fechada é uma curva para a qual $z(a) = z(b)$, e uma curva fechada simples é uma curva que não se intercepta e $z(a) = z(b)$. Uma curva fechada é dita positivamente orientada quando a região por ela delimitada encontra-se à esquerda ao percorrermos a curva, ou ainda no sentido anti-horário.*

Definição 2.7. *Uma curva $\mathscr{C}$ é suave se $x'(t)$ e $y'(t)$ são funções contínuas num intervalo fechado $[a, b]$ e não são simultaneamente zero no intervalo aberto (a, b).*

Definição 2.8. *Uma curva $\mathscr{C}$ é suave por partes se ela consiste de um número finito de curvas suaves $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \ldots, \mathscr{C}_n$ com os extremos coincidindo, ou seja, cada curva possui como ponto incial $z(t_i)$ e ponto final $z(t_{i+1})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $a \leq t \leq b$.*

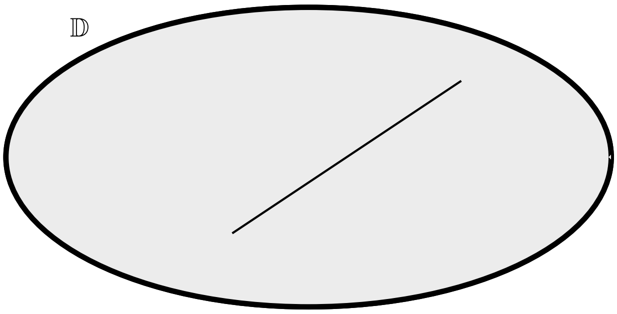
Definição 2.9. *Um contorno é uma curva suave por partes.*

Definição 2.10. *Uma região é conexa se dois pontos quaisquer da mesma podem ser unidos por uma cadeia contínua de um número finito de segmentos cujos pontos pertencem à região.*

Definição 2.11. *Uma região aberta e conexa é denominada domínio.*

Definição 2.12. *Um domínio $\mathbb{D}$, no plano complexo, é chamado domínio simplesmente conexo se todo contorno fechado simples, em $\mathbb{D}$, encerra somente pontos em $\mathbb{D}$. Ver* Figura 1. *Um domínio que não é simplesmente conexo é dito multiplamente conexo.*

Figura 1: Domínio simplesmente conexo.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Teorema 2.13. (Cauchy). *Se uma função $f(z)$ é analítica em um domínio simplesmente conexo, $\mathbb{D}$, então ao longo de um contorno fechado simples, $\mathscr{C}$, em $\mathbb{D}$, temos*

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Teorema 2.14. (Morera) *Se uma função $f(z)$ é contínua em um domínio, $\mathbb{D}$, e se*

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

para todo contorno fechado, $\mathscr{C}$, em $\mathbb{D}$, então $f(z)$ é analítica em $\mathbb{D}$.

Definição 2.15. (Série de Laurent) *Uma função analítica na coroa circular, ou anel, $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$, pode ser representada pela expressão*

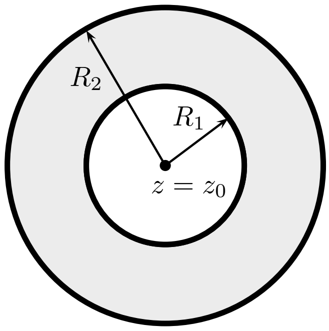
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

na região $R_1 < R_a \leq |z - z_0| \leq R_b < R_2$ onde os coeficientes são dados por

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

e $\mathscr{C}$ é um contorno fechado simples na região de analiticidade encerrando a fronteira interior, $|z - z_0| = R_1$. Para o contorno, considere a Figura 2.

Figura 2: Coroa circular de raios R_1 e R_2.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Definição 2.16. (Resíduo) *Seja a série de Laurent*

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k(z-z_0)^k}_{\text{Parte principal}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k}_{\text{Taylor}}.$$

O particular coeficiente obtido com $k = -1$, é chamado resíduo e denotado por C_{-1} ou $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$. Por ser um mero coeficiente da série de Laurent, temos

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i C_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)\,,$$

sendo $\mathscr{C}$ um contorno fechado simples.

Acabamos de destacar a importância de um particular coeficiente da série de Laurent, o resíduo. Agora, ainda com a série de Laurent, vamos discutir as singularidades de uma função em um ponto $z = z_0$.

Assim, visto que a parte da série de Laurent, relativa à série de Taylor, é analítica em $z = z_0$, consideramos apenas a sua parte principal, com as potências negativas, escrita na forma

$$\frac{b_1}{z-z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

onde $b_m \neq 0$, tem uma singularidade em $z = z_0$.

Definição 2.17. *Se a série de Laurent tem um número finito de termos, a singularidade é chamada polo e m é a ordem.*

Definição 2.18. *Se a série de Laurent apresenta um número infinito de termos, a singularidade é chamada essencial.*

Definição 2.19. *Se a função $f(z)$ não é analítica em $z = z_0$, mas pode vir a ser, a partir de um certo valor de $f(z_0)$, chamamos a singularidade de removível.*

Definição 2.20. *Se a série de Laurent contém um fator* $(z-z_0)^\mu$ *com* $\mu \notin \mathbb{Z}$*, a singularidade é chamada ponto de ramificação.*

Definição 2.21. *Um ponto* $z = z_0$ *é uma singularidade isolada de uma função* $f(z)$ *se, em alguma vizinhança de* $z = z_0$*, não temos mais singularidades de* $f(z)$*.*

Definição 2.22. *Uma função* $f(z)$ *é analítica ou singular no infinito se* $g(\omega)$ *é analítica ou singular, respectivamente, em* $\omega = 0$*, onde* $f(z) = f(1/\omega) = g(\omega)$*.*

Definição 2.23. *Uma função é dita meromorfa se tem somente polos em um conjunto aberto do plano complexo. Alternativamente, uma função meromorfa é uma razão de funções inteiras.*

Definição 2.24. *Se a cada valor de* z *corresponde um só valor de* $w = f(z)$*, dizemos que* w *é uma função unívoca de* z*. Uma função unívoca também é chamada de monódroma ou univalente.*

Definição 2.25. *Se a cada valor de* z *corresponde mais de um valor de* $w = f(z)$*, dizemos que* w *é uma função plurívoca de* z*. Uma função plurívoca também é chamada de polídroma ou multivalente.*

Definição 2.26. *Seja* $f(z)$ *uma função analítica em todo lugar, dentro e sobre um contorno fechado simples e orientado no sentido positivo, denotado por* $\mathscr{C}$*. Se* z_0 *é qualquer ponto no interior de* $\mathscr{C}$*, então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

que é a chamada fórmula de Cauchy.

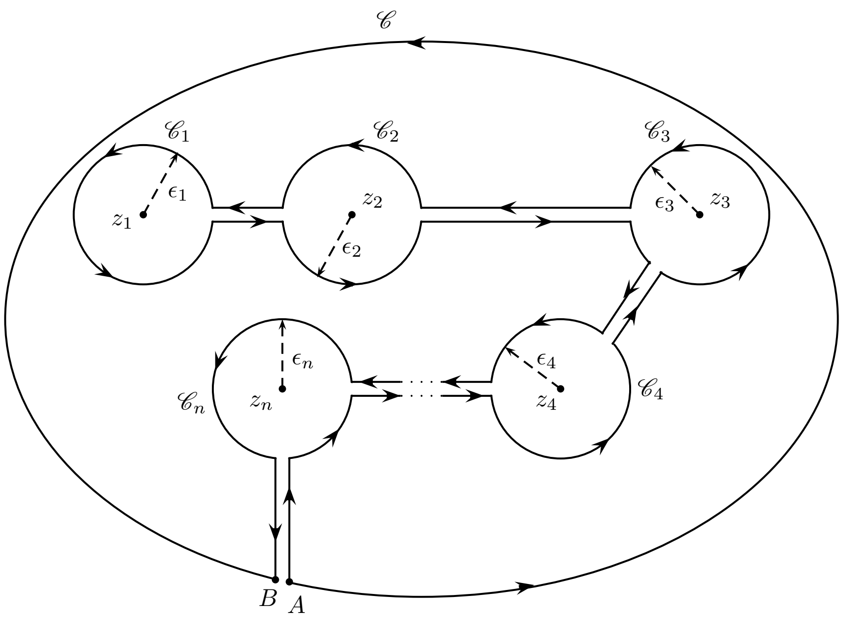
Definição 2.27. *Seja* $f(z)$ *uma função analítica em todo lugar, dentro e no contorno simples fechado e positivamente orientado,* $\mathscr{C}$*. Se* z_0 *é qualquer ponto no interior de* $\mathscr{C}$*, então*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ *e* $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ *que é conhecida como a fórmula integral de Cauchy estendida.*

Teorema 2.28. (Teorema dos resíduos) *Seja* $\mathscr{C}$ *um contorno fechado simples, dentro e sobre o qual* f *é uma função analítica, exceto para um número finito de pontos singulares isolados* $z_1, z_2, \ldots, z_N$*, conforme* Figura 3.

Figura 3: Caminho simples orientado no sentido positivo.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Então, a integral em $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \cdots \cup \mathscr{C}_n$ *é*

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} a_j = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

onde a_j *é o resíduo de* $f(z)$ *em* $z = z_j$.

Convém destacar que temos uma expressão para calcular o resíduo quando a singularidade é um polo, ou polar, dada pelo Teorema 2.29.

Teorema 2.29. (Polo de ordem k) *Se a singularidade de* $f(z)$ *é um polo de ordem* k, *o resíduo,* a_{-1}, *em* $z = z_0$, *pode ser calculado através da expressão*

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big[(z - z_0)^k f(z)\Big]_{z=z_0}.$$

Definição 2.30. *Uma função* $f(z)$ *tende a zero,* $f(z) \to 0$, *uniformemente quando* $R \to \infty$ *no caminho* $\mathscr{C}_R$ *se* $|f(z)| \leq K_R$ *onde* K_R *depende somente de* R *(não do argumento) e* $K_R \to 0$ *quando* $R \to \infty$.

Lema 2.31. (Lema de Jordan) *Suponha que sobre o arco circular* $\mathscr{C}_R$ *tenhamos* $f(z) \to 0$ *uniformemente quando* $R \to \infty$. *Então,*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{C}_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

com $\alpha > 0$.

Definição 2.32. *O valor principal de Cauchy de uma integral imprópria,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

com notação PV*, é dado por*

$$\mathsf{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se a integral imprópria é do tipo onde a função é ilimitada no intervalo de integração, a definição do valor principal de Cauchy, neste caso, é dada por

$$\mathsf{PV}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

onde $c \in [a,b]$ *é um ponto singular de* $f(x)$*.*

3 CÁLCULO DE UMA INTEGRAL REAL

Nesta seção, nos propomos discutir uma integral real a partir de três maneiras distintas. A integral $\mathbf{J}$, apresentada na Equação (1), será recuperada como caso particular. Visto que fizemos uma breve menção dos conceitos das funções analíticas, começamos com o cálculo da integral real utilizando o ferramental das funções analíticas, com destaque para as funções polídromas [1]. Ao final da seção vamos discutir a mesma integral através de duas outras maneiras.

3.1 Utilizando o plano complexo

Iniciamos com a discussão de uma integral geral, dependendo de uma função e de um parâmetro, que devem obedecer a certas restrições, o que vamos fazer através de um teorema. Assim, antes de apresentar o teorema, façamos as devidas considerações sobre $f(x)$, como sendo uma função racional que não apresenta polos na parte positiva do eixo real e $\mu \in \mathbb{C}$, de modo que a integral,

$$\mathsf{J}(\mu) = \int_{0}^{\infty} x^{\mu-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

esteja bem definida. Note que a integral $\mathsf{J}(\mu)$, para certas funções $f(x)$ e em uma particular faixa de analiticidade [5], pode ser interpretada como a transformada de Mellin de $f(x)$, caso contrário, é apenas uma integral que depende de um parâmetro. Ainda mais, note que na transformada de Mellin, J é um operador atuando na função $f(x)$, com núcleo x^{s-1} e, uma vez que existe tal transformada, resulta na função $\mathsf{J}(s)$. Além disso, para $\mu = 1$ e $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, $\mathsf{J}(1) = \mathbf{J}$, ou seja, a integral $\mathbf{J}$ é recuperada como caso particular.

Então, devemos impor certas condições (restrições) tanto no parâmetro μ, quanto na função $f(x)$, de modo que a integral seja convergente. Começamos com os dois limites extremos da integral real, onde devemos ter as condições

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow A\,x^k, \qquad A = \text{constante}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \longrightarrow B\,x^\ell, \qquad B = \text{constante}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Como vamos nos assegurar, essas condições são necessárias a fim de que as integrações no plano complexo, sobre as duas circunferências, não contribuam para o teorema dos resíduos. Vamos relacionar essas duas condições com o parâmetro μ, expoente de um fator multiplicativo de $f(x)$, ou seja, na vizinhança de $z = 0$, a função integrada deve ser tal que

$$\lim_{x\to 0} x^{\mu-1} f(x) \longrightarrow A\,x^{\mu+k-1},$$

de modo que neste extremo a integral não seja divergente, logo

$$-1 + k + \mathrm{Re}(\mu) > -1, \qquad k + \mathrm{Re}(\mu) > 0.$$

Analogamente, na vizinhança do infinito, devemos ter

$$\lim_{x\to\infty} x^{\mu-1} f(x) \longrightarrow B\,x^{\mu+\ell-1}$$

e, a fim de que a integral seja convergente, temos

$$-1 + \ell + \mathrm{Re}(\mu) < -1, \qquad \ell + \mathrm{Re}(\mu) < 0.$$

Com essas duas imposições, relativamente aos dois extremos da integral, emerge naturalmente a restrição

$$-k < \mathrm{Re}(\mu) < -\ell \tag{2}$$

o que implica que a integral real só estará definida se $\ell < k$.

Assim, podemos resumir de tal forma que, se $\ell < k$ a integral $\mathsf{J}(\mu)$ é convergente para todo μ satisfazendo a condição dada pela Equação (2).

Teorema 3.1. *Sejam $\ell, k \in \mathbb{Z}$ tal que $\ell < k$, $\mu \in \mathbb{C}$ e $f(x)$ uma função racional que não apresenta polos na parte positiva do eixo real, então a integral real*

$$\mathsf{J}(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge se, e somente se, $-k < \mathrm{Re}(\mu) < -\ell$ e tal que

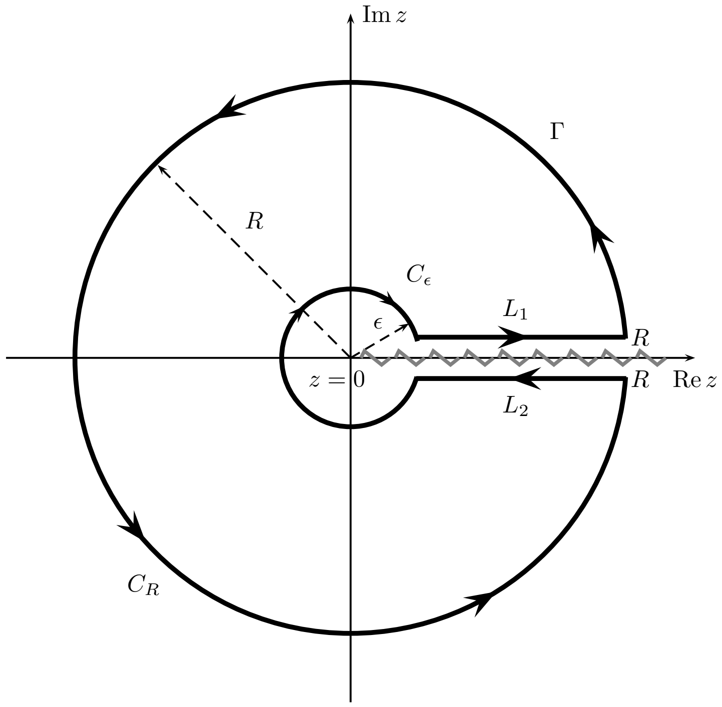
$$\mathsf{J}(\mu) = -\pi \frac{e^{-i\pi\mu}}{\operatorname{sen}\pi\mu} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[z^{\mu-1} f(z)\right]_{z=z_k}.$$

PROVA. A fim de provarmos o teorema, vamos considerar a seguinte integral no plano complexo

$$\mathcal{J}(\mu) = \oint_\Gamma z^{\mu-1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

sendo o contorno $\Gamma = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\epsilon$, simples, fechado e orientado no sentido positivo, anti-horário, composto por duas circunferências concêntricas de raios ϵ e R, centradas na origem, e dois segmentos de reta, conforme Figura 4.

Figura 4: Contorno excluindo o ponto de ramificação $z = 0$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Note que excluímos a linha de corte, parte positiva do eixo real x, onde a função $f(x)$ não apresenta singularidades polares. Vamos percorrer o contorno, utilizar o teorema dos resíduos e tomar os limites $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$.

Ainda mais, podemos escrever para as duas circunferências, aquela de raio ϵ, orientada no sentido horário (negativo), a parametrização

$$x = \epsilon\, e^{i\theta}, \qquad\qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

enquanto a outra, orientada no sentido anti-horário (positivo), é tal que

$$x = R\, e^{i\theta}, \qquad\qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

e os dois segmentos paralelos à linha de corte, próximos a ela, um no primeiro quadrante e o outro no quarto quadrante. Note também que, na Figura 4, a curva C_ϵ está orientada no sentido horário, com θ variando de 2π a 0. Porém, ao utilizarmos o valor de θ variando de 0 a 2π, o sinal da integral muda, o que equivale a mudarmos a orientação da curva C_ϵ para o sentido anti-horário.

Diante dessas considerações e utilizando o teorema dos resíduos, temos

$$\mathcal{J}(\mu) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[z^{\mu-1} f(z)\right].$$

Vamos agora percorrer o contorno Γ, composto das duas circunferências e dois segmentos de reta, isto é, dividido em quatro partes, já explicitando os limites, de onde podemos escrever

$$\mathcal{J}(\mu) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} R(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_1} R_+(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} R(z)\,\mathrm{d}z - \int_{L_2} R_-(x)\,\mathrm{d}x$$

onde introduzimos a notação $R(x) = x^{\mu-1} f(x)$, sendo

$$\begin{aligned} R_+(x) &= x^{\mu-1} f(x) && x > 0, \\ R_-(x) &= x^{\mu-1} f(x)\, e^{2i\pi(\mu-1)} && x < 0. \end{aligned}$$

A primeira e a terceira integrais são nulas devido às restrições impostas em relação ao parâmetro, $-k < \operatorname{Re}(z) < -\ell$ com $\ell < k$. Restam-nos, assim, as integrais sobre os dois segmentos paralelos ao eixo horizontal,

$$\mathcal{J}(\mu) = \int_0^\infty \left[R_+(x) - R_-(x)\right]\,\mathrm{d}x,$$

cujo integrando permite escrever

$$R_+(x) - R_-(x) = x^{\mu-1} f(x)\left[1 - e^{2i\pi(\mu-1)}\right]$$

de onde segue

$$\mathcal{J}(\mu) = -2ie^{i\pi(\mu-1)}\operatorname{sen}[\pi(\mu-1)]\mathsf{J}(\mu)$$

que, isolando $\mathsf{J}(\mu)$, a integral que desejamos calcular, e simplificando, fornece

$$\mathsf{J}(\mu) = \frac{i\,e^{-i\pi\mu}}{2\operatorname{sen}\pi\mu}\mathcal{J}(\mu).$$

Por outro lado, $\mathcal{J}(\mu)$ já foi calculada via teorema dos resíduos, logo

$$\begin{aligned}\mathsf{J}(\mu) &= \frac{i}{2}\frac{e^{-i\pi\mu}}{\operatorname{sen}\pi\mu}\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[z^{\mu-1}f(z)\right]_{z=z_k}\right\}\\ &= -\pi\frac{e^{-i\pi\mu}}{\operatorname{sen}\pi\mu}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[z^{\mu-1}f(z)\right]_{z=z_k}\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 3.2. *Sejam $f(z)$ uma função analítica que não apresenta pontos singulares no semieixo real positivo e p um parâmetro inteiro. Se as condições*

$$\lim_{z\to 0}[z^p f(z)] = 0 = \lim_{z\to\infty}[z^p f(z)],$$

valem, então, segue o resultado

$$\int_0^\infty x^{p-1}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen}p\pi}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[(-z)^{p-1}f(z)\right]_{z=z_k}$$

onde $z_1, z_2, \ldots, z_k$ são os polos de $f(z)$ e $(-z)^{p-1} = \exp[(p-1)\ln(-z)]$.

PROVA. Consequência do TEOREMA 3.1. □

Aqui, antes de apresentar outras maneiras de calcular uma integral real, é um ponto interessante onde o estudante pode se certificar do resultado, exercitando-se com um caso particular. Por exemplo, considere o parâmetro $p = 1$ e a função $f(x) = (1 + x^3)^{-1}$ a fim de mostrar que a integral é $2\pi\sqrt{3}/9$, bem como recupere o resultado da integral $\mathbf{J}$.

3.2 Uma mudança de variável e o plano complexo

Como uma outra maneira para calcular integrais reais, antes de utilizarmos o plano complexo é conveniente primeiro efetuar uma mudança de variável. Para tal, vamos considerar uma função no integrando que não tenha pontos singulares na parte positiva do eixo real. Então, propomos o cálculo da seguinte integral

$$\mathsf{J}(\mu, n) = \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1 + x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

com n e μ parâmetros reais com $0 < \mu < 2n$.

Começamos por introduzir a seguinte mudança de variável $x^{2n} = t$. Calculando a derivada e rearranjando, obtemos

$$\mathsf{J}(\mu, n) = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

A partir desse integrando, concluímos que $t = -1$ é um polo simples e $t = 0$ é um ponto de ramificação. Para calcular essa integral real, vamos considerar uma conveniente integral no plano complexo

$$\oint_\Gamma \frac{z^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z$$

onde Γ é o contorno, como na Figura 4, contendo agora, o ponto $z=-1$ em seu interior, contribuindo assim com o resíduo. Percorrendo o contorno, orientado no sentido positivo e utilizando o teorema dos resíduos, podemos escrever a soma das quatro contribuições

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_{C_R} \frac{z^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_\infty^0 \frac{(t\,e^{2i\pi})^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_{C_\epsilon} \frac{z^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi i\,\mathrm{Res}(z=-1),$$

que, rearranjando, permite escrever

$$\frac{1}{2n}\left[1-e^{2i\pi\left(\frac{\mu}{2n}-1\right)}\right]\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi i}{n}\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+z},$$

pois as integrais sobre os contornos C_R e C_ϵ vão a zero, respectivamente, nos limites $R\to\infty$ e $\epsilon\to 0$. Calculando o resíduo, utilizando a relação de Euler, escrevendo o seno em termos de exponenciais e simplificando, obtemos

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\mu}{2n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\dfrac{\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\left(\pi\dfrac{\mu}{2n}\right)},$$

com $0<\mu<2n$, que é o resultado desejado. Como um interessante caso particular, consideramos $\mu = n+1$, com a condição $0<n+1<2n$, temos

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\dfrac{\pi}{2n}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}.$$

3.3 Substituição e artifício

Por fim, vamos apresentar o cálculo da integral J(μ, n) através de um artifício, popularizado por Feymann, onde é introduzida uma função (às vezes apenas um parâmetro) no integrando que permita efetuar a derivada no parâmetro e que nos leve a uma integral mais simples de ser resolvida.

Uma vez calculada a integral, dependente do parâmetro, voltamos a fim de determinar a integral de partida.

Assim, consideremos um parâmetro α e a função $\exp[\alpha(1+x^{2n})]$, com $\alpha\le 0$. Note que essa função está bem definida em ambos os extremos de integração. Diante disso, devemos resolver a integral

$$\mathsf{J}(\mu, n, \alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha(1+x^{2n})} \frac{x^{\mu-1}}{1+x^{2n}}\, \mathrm{d}x$$

e, ao final, considerar $\alpha = 0$ a fim de recuperar a integral desejada.

Então, primeiro derivamos ambos os membros em relação ao parâmetro α, e rearranjamos na seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\mu, n, \alpha) = e^{\alpha} \int_0^\infty e^{\alpha x^{2n}} x^{\mu-1}\, \mathrm{d}x.$$

Segundo, introduzimos a mudança de variável $\alpha x^{2n} = u$ de onde calculando a derivada e simplificando, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\mu, n, \alpha) = \frac{e^{\alpha}}{2n\, \alpha^{\frac{\mu}{2n}}} \int_0^{-\infty} e^{u} u^{\frac{\mu}{2n}-1}\, \mathrm{d}u.$$

A integral resultante é uma integral conhecida, pois, é a representação da função gama, de onde segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\mu, n, \alpha) = \frac{e^{\alpha}}{2n}(-\alpha)^{-\frac{\mu}{2n}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2n}\right)$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é uma função gama.

Agora, vamos integrar no parâmetro α de onde segue

$$\mathsf{J}(\mu, n) = \frac{1}{2n}\Gamma\left(\frac{\mu}{2n}\right) \int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{-\frac{\mu}{2n}}\, \mathrm{d}\alpha.$$

Cabem duas observações, primeira, uma vez integrado o primeiro membro, esse não depende da variável de integração (uma variável muda) e, segunda, a integral tem os extremos zero e infinito, pois em ambos a integral está bem definida, ou seja, a integral converge. Ainda mais, note que não fizemos uso das funções, ou ainda do plano complexo.

Então, a partir da representação para a função gama, podemos escrever

$$\mathsf{J}(\mu, n) = \frac{1}{2n}\Gamma\left(\frac{\mu}{2n}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2n}\right).$$

Ainda mais, vamos simplificar esse resultado, utilizando uma relação entre as funções gama e o seno trigonométrico, logo

$$\mathsf{J}(\mu, n) = \frac{\dfrac{\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi\mu}{2n}\right)}$$

que é o resultado desejado, o mesmo obtido através de uma outra metodologia, no caso utilizando as funções analíticas e o plano complexo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de uma situação ocorrida dentro de sala de aula, apresentamos a forma geral para o cálculo de uma integral real através das variáveis complexas, particularizando para aquela mencionada na respectiva aula. Para essa integral, apresentamos mais duas opções para o seu cálculo, uma delas, um misto de variável real e variável complexa, como vimos, simplificou a integração no plano complexo, e outra apenas com as variáveis reais onde, o preço a pagar é ter conhecimento da função gama, o que não ocorreu com a integração no plano complexo, ou ainda fazendo uso das funções analíticas.

Ainda que seja uma seção para considerações finais, é importante mencionar que cabe ao estudante discernir qual a melhor maneira de abordar o exercício/problema, pois, de posse dessas três maneiras, cada uma delas com as suas particularidades, a escolha requer treino e mais treino. Entendemos que, só assim, com bastante treino, o estudante fará a opção mais adequada e, eventualmente, venha a propor uma maneira alternativa.

REFERÊNCIAS

[1] Vaz Jr, J. e De Oliveira, E. C. *Métodos Matemáticos*, Volume 1, 1ªed. Campinas: Editora da Unicamp, 2016.

[2] De Oliveira, E. C. e Rodrigues Jr., W. A. *Funções Analíticas com Aplicações*, 1ªed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

[3] Churchill, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, 1ªed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo-Editora McGraw-Hill do Brasil, 1975.

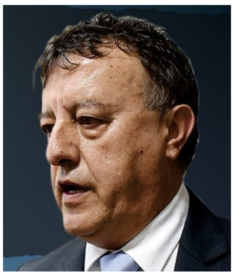
[4] Ablowitz, M. J. and Fokas, A. S. *Complex Variables*: *Introduction and Applications*, in Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[5] Vaz Jr, J. e De Oliveira, E. C. *Métodos Matemáticos*, Volume 2, 1ªed. Campinas: Editora da Unicamp, 2016.

BREVE BIOGRAFIA

Marina Lima https://orcid.org/0000-0002-8520-4306

Doutoranda em Matemática Aplicada no Instituto de Matemática e Estatística e Computação Científica da Unicamp. Atualmente trabalha com a formulação e análise de modelos epidemiológicos utilizando cálculo integrodiferencial e funções especiais.



Edmundo Capelas de Oliveira https://orcid.org/0000-0001-9661-0281

Doutor em Física pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Fez pós-doutorado junto à Università di Perugia, Itália. Atualmente é Professor Titular junto ao Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística e Computação Científica da Unicamp. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Métodos Matemáticos da Física, atuando principalmente nos temas: cálculo integrodiferencial fracionário, funções especiais, funções analíticas e equações diferenciais.