Revista RBBA

Revista Binacional Brasil Argentina

UN EJEMPLO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA: ACEITE Y AGUA

UM EXEMPLO DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL II: ÓLEO E ÁGUA

José Antonio Cajaraville Pegito
Maria Teresa Fernández Blanco
J. Benito Búa Ares
Universidad de Santiago de Compostela/ ja.cajaraville@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela/teref.blanco@usc.es
IES Ramón cabanillas/bua@edu.xunta.es

Resumen
En este trabajo se presenta una investigación sobre una actividad de modelización matemática funcional en la Enseñanza Secundaria. La modelización propuesta, centrada en el comportamiento del aceite y del agua, pretende analizar el grado de adquisición de conocimientos de los alumnos sobre la noción de función y sus operaciones. El objetivo principal será mostrar los resultados relativos al proceso de obtención de la tabla de datos y a la generación de un modelo funcional que establezca la forma analítica en que se relacionan los datos obtenidos.
Palabras-clave: Modelización funcional; funciones; GeoGebra; enseñanza secundaria.

Resumo
Neste trabalho é apresentada uma investigação de uma atividade de modelagem matemática funcional nas escolas de Ensino Fundamental II. A modelagem proposta, com foco no comportamento do óleo e da água, pretende analisar o grau de aquisição de conhecimentos dos alunos sobre a noção de função e suas operações. O principal objetivo é mostrar os resultados relativos ao processo de obtenção da tabela de dados e a geração de um modelo funcional que estabeleça a forma analítica como os dados obtidos se relacionam.
Palavras-chave: Modelagem funcional; funções; GeoGebra; ensino secundário.

Introducción

La modelización utilizada en la enseñanza de las Matemáticas, comúnmente incluida como uno de los elementos en la resolución de problemas en contexto, es un campo de investigación desde hace más de 30 años y ha pasado a ser parte fundamental en la investigación actual en Didáctica de la Matemática. Así, el ERME (European Society for Research in Mathematics Education) y los CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) incluyen el grupo "***Applications and modeling***" entre los grupos de investigación. El ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) posee una sección afiliada dedicada específicamente a la modelización (International Community of Teachers of Modelling and Applications, ICTMA), NCTM (2000) concede importancia a la modelización integrada como parte de la resolución de problemas y el informe PISA (2009, p. 105-106) considera la modelización como parte del proceso de matematización de un problema matemático, incluyéndola como una de las ocho capacidades que describe y analiza.

Respecto a la enseñanza de las Matemáticas en España, la mención sobre la inclusión de actividades de modelización no aparece de forma expresa ni en el curriculum de enseñanza secundaria obligatoria ni en el Bachillerato (REAL DECRETO 1631/2006, REAL DECRETO 1467/2007). Las menciones relacionadas con la modelización aparecen, fundamentalmente, en la descripción de las competencias matemáticas que los alumnos deben alcanzar, poniendo el énfasis en la resolución de problemas situados en contexto, siguiendo claramente la línea marcada por los documentos PISA.

El problema, que toma la forma de una modelización funcional, se propone a los alumnos como el análisis de una situación real problemática simplificada. La contextualización del problema se realiza planteando la necesidad de la modelización desde una situación real: el vertido contaminante que produjo el buque Prestige en las costas gallegas. Ante un vertido de petróleo en el mar se plantea una pregunta: ¿cómo se mide la cantidad de fuel presente en el agua y que sólo se manifiesta en forma de una mancha oscura sobre el mar?

Si bien las actividades surgen o se justifican como un proceso de modelización, su finalidad fundamental desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es conseguir obtener un modelo matemático funcional, sino facilitar un análisis de las posibles dificultades u obstáculos que se presentan en los alumnos alrededor del concepto de función y de las operaciones entre funciones. Para conseguirlo se usa la modelización como forma de situar el problema en contexto y como justificación de la necesidad de obtener una función que permita contestar preguntas que el problema suscita, lo que nos proporciona la primera y segunda partes de la actividad y que representan dos fases o pasos en el proceso de modelización:

a) obtención de datos sobre la situación o fenómeno a modelizar.

b) obtener la expresión que establece una relación funcional entre los datos obtenidos

Una vez conseguida la respuesta a la pregunta sobre qué tipo de relación se establece entre los datos estudiados, surge la posibilidad de plantear nuevas fases o pasos a seguir en el proceso de modelización. Así, en una tercera fase, que tomará la forma de cuestionario, la modelización pasa a un segundo plano y el lugar predominante lo ocupa la comprobación de hasta qué punto los alumnos dominan el concepto de función y algunas de las operaciones entre funciones. Una cuarta fase permite volver de nuevo al modelo, buscando su aplicación a un hipotético caso real, usando conocimientos de los alumnos no directamente relacionados con las funciones y planteando posibles avances en el modelo construido desde una postura crítica sobre el trabajo realizado. De esa forma, la actividad sigue un proceso de contextualización (por medio de la presentación del problema en el contexto de la realidad cercana al alumno), descontextualización (en las fases centradas en la obtención del modelo funcional, 1ª y 2ª fase y , en menor medida, 3ª fase) y recontextualizacion (que se produce en la aplicación del modelo a la situación inicial contextualizada en la realidad cercana al alumno, parcialmente en la 3ª fase y plenamente en la 4ª). En el presente artículo únicamente analizaremos los resultados relativos a las dos primeras fases.

Este trabajo se estructura en varias secciones que se describirán a continuación. En la primera sección se describen diferentes aspectos del marco teórico en el que se apoya la investigación. En la segunda sección se detalla el problema de investigación planteado a los estudiantes. La metodología seguida ocupará la tercera sección dando pie a la sección cuarta en la que se describirán las fases de la experimentación. El análisis y discusión de los de resultados se presentará en la siguiente sección y, por último se expondrán algunas de las conclusiones más relevantes.

Marco Teórico

La noción de obstáculo en Didáctica de las Matemáticas

En la investigación en Didáctica de la Matemática una de las formas de enfrentar el análisis de la problemática didáctica de una noción o concepto matemático es desde la toma en consideración de las concepciones y obstáculos ligados el desarrollo de la noción o concepto y que pueden tener su reflejo en los alumnos, tanto en sus concepciones o creencias como en los problemas que puedan encontrar en su proceso de aprendizaje. El primero en nombrar los "obstáculos epistemológicos" fue Bachelard (1938) para el cual el conocimiento científico se debe plantear en términos de obstáculos puesto que "[...] es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones" (BACHELARD, 1938, p. 15). El conocimiento se construye superando esos obstáculos, de forma que los obstáculos forman parte del desarrollo científico. Bachelard califica esos entorpecimientos y confusiones como obstáculos epistemológicos y sostiene que los obstáculos epistemológicos pueden ser observados en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.

Brosseau (1980, 1981, 1983, 1989) retoma la noción de obstáculo de Bachelard y la aplica a la Didactica de la matemática. Su caracterización de obstáculo es la siguiente:

> "a) Un obstáculo debe ser un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
>
> b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
>
> c) Pero engendra respuestas falsas fuera de ese contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
>
> d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se enfrenta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

> e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada." (BROUSSEAU, 1989, p. 43)

Para Brosseau (1983, p. 177), existen tres tipos de obstáculos didácticos en función de su origen:

- *Origen ontogenético*. Los obstáculos de origen ontogenético son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en un momento de su desarrollo.

- *Obstáculos de origen didáctico*. Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto del sistema educativo.

- *Obstáculos didácticos de origen epistemológico*. Los obstáculos de origen propiamente epistemológica son aquellos a los cuales uno no puede (ni debe) escapar, asumiendo su rol constitutivo del conocimiento al que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido superados.

Posteriormente, incluyó un cuarto obstáculo de origen cultural que viene dado por el entorno cultural, donde se desarrollan conceptualizaciones erróneas y se utilizan en un sentido diferente al usado en matemáticas.

Para Brosseau (1997, p. 99), dentro de un trabajo de investigación sobre las concepciones y los obstáculos, juega un papel de gran importancia el estudio histórico epistemológico de la evolución de un determinado concepto o noción. Se parte de la idea de que el estudio epistemológico histórico de un determinado concepto o noción puede dar claves para comprender algunos de los obstáculos o dificultades que se pueden presentar en los alumnos. Según este autor, un obstáculo presente en la evolución histórica de la Matemática representa un obstáculo epistemológico.

Otros autores, como Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 224), comparten con el anterior autor la consideración de qué es un obstáculo y la importancia del análisis histórico.

Por su parte, Godino, Batanero y Font distinguen, en el enfoque ontosemiótico, entre significado institucional y personal de un objeto (GODINO, BATANERO y FONT, 2007, p. 129-130). Estos autores identifican cuatro tipos de significados presentes en el significado institucional: implementado, evaluado, pretendido y referencial:

> "- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
> - Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
> - Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
> - Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido." (GODINO *et al*., 2007, p. 129)

El estudio histórico epistemológico es, para estos autores, la base para el estudio del significado referencial y así, la determinación de dicho significado requiere realizar un estudio histórico y epistemológico para encontrar el origen y evolución del objeto.

De esa forma y en el marco de la investigación realizada, se hace necesario el estudio de la evolución histórica de las concepciones ligadas al concepto de función y la presencia y superación de obstáculos en dicha evolución histórica.

Evolución histórica del concepto de Función. Concepciones y obstáculos

El concepto de función juega un papel de gran importancia en la Matemática, tanto en el desarrollo histórico de esta Ciencia como en su enseñanza. Dada su importancia, el estudio de la Historia de la Matemática es también el estudio de la evolución del concepto de función. Con tal motivo, los trabajos sobre la Historia de la Matemática se convierten en una referencia para el estudio del concepto de función y, por tanto, de los obstáculos y dificultades identificables en la evolución histórica del concepto de función.

Dentro del estudio del concepto de función, desde una perspectiva de su enseñanza, destacamos los trabajos de Cornu (1983), René de Cotret (1985), Sierpinska (1992), Dubinsky y Harel (1992), Ponte (1992), Ruíz Higueras (1993, 1998), o Biehler (2005). En particular, para describir qué obstáculos y concepciones se observan en la evolución histórica del concepto de función, los trabajos de René de Cotret (1985) y de Ruíz Higueras (1993, 1998) resultan especialmente relevantes.

Ruíz Higueras (1998, pp. 136-141), después de un completo análisis histórico, detecta siete concepciones de la noción de función (CE) que se muestran a continuación:

CE1 *"Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables".* Sitúa el nacimiento histórico de esta concepción en la matemática prehelénica, perdurando largo tiempo, y la asocia a la representación de *"Medidas de cantidades"* y *"Tablas"*.

CE2 *"Razón o proporción"*. Aparece en la matemática griega y perdura hasta matemáticos como Oresme y Galileo.

CE3 *"Gráfica (visión sintética)"*. Comenzó en las escuelas de París y Oxford, especialmente con Oresme.

CE4 *"Curva (analítico-geométrica)".* Fermat y Descartes introducen esta concepción al interpretar, por primera vez, que una ecuación en x e y es un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables, relacionándolo asimismo con la noción de curva.

CE5 *"Expresión analítica".* Nacida gracias a los avances en el álgebra y claramente observable a Euler, autor de la denominación de una función como "Expresión analítica" y que identifica una función con su expresión analítica.

CE6 *"Correspondencia arbitraria: Aplicación"*. Surge en el mismo período histórico que la CE5 (s. XVIII) hasta consolidarse ya en el s. XX.

CE7 *"Función como terna f=(F, X, Y)"*. La última y que se corresponde con la concepción observable en un libro de texto actual.

Así mismo, esta autora también reconoce siete obstáculos (OB) asociados a la evolución histórica de dicho concepto:

OB1 "*Obstáculo de la concepción estática*". Se produce por la consideración de las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas.

OB2 "*Obstáculo de disociación existente entre magnitudes y números*". Consecuencia de la consideración, típica del pensamiento griego, de la magnitud como continua y del número como discreto.

OB3 "*Obstáculo de la razón o proporción*". Asociado a un obstáculo para el desarrollo de la noción de variable y, por tanto, de la noción de función.

OB4 "*Obstáculo de la homogeneidad en las proporciones*". La homogeneidad conducía a comparar magnitudes de la misma naturaleza, lo que impide el estudio de la relación entre magnitudes no homogéneas y, como consecuencia, de la relación funcional.

OB5 *"Obstáculo de la concepción geométrica de las variables".* Íntimamente ligada a concepciones geométricas de la matemática, por ejemplo en el pensamiento griego y helenístico. No superado hasta la llegada de Descartes y Fermat.

OB6 *"Obstáculo de la concepción algebraica".* Motivada por el convencimiento de que solo las relaciones funcionales que pueden ser descritas en forma de expresiones algebraicas y ecuaciones eran dignas de ser estudiadas.

OB7 "*Obstáculo de la concepción mecánica de curva*". Las curvas, inicialmente, no fueron consideradas como gráficos de una relación funcional sino como trayectorias de puntos en movimiento.

Godino, Font, Bencomo y Wilhelmi (2006) sintetizan los elementos que utilizan como significado institucional de la noción de función alrededor de aquello que tiene que ver con la naturaleza relacional de las matemáticas, las matemáticas como actividad humana y las matemáticas como proceso, antes que como producto. De esa forma y en relación con la noción de función, estos autores usan como referencia el siguiente esquema, en el que se distinguen los significados institucionales tabular, gráfico, analítico y conjuntista.

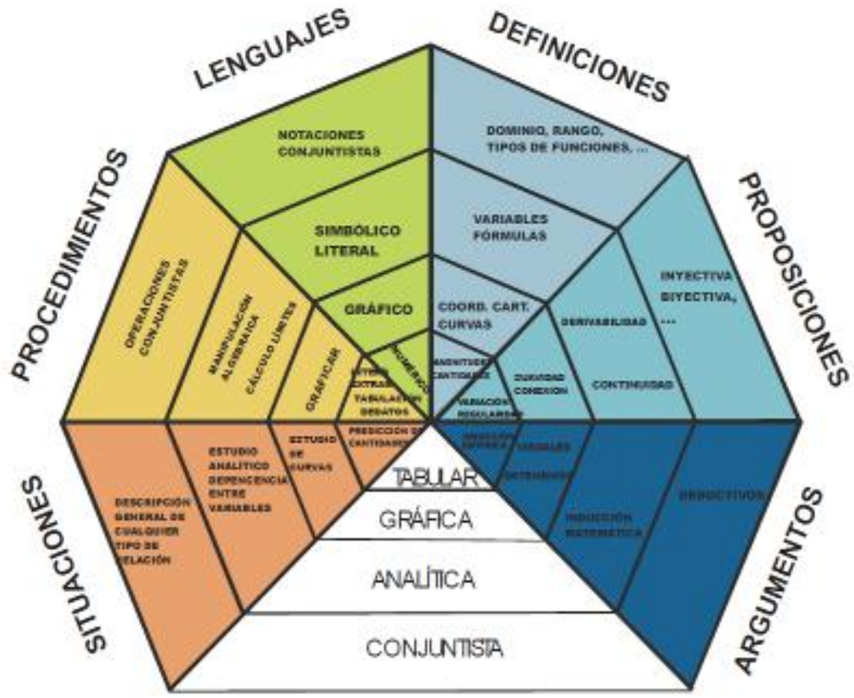

Figura 1. GODINO et al., 2006, p. 11

El Ciclo de Modelización

Existen diferentes descripciones de las diferentes fases o pasos que se siguen en un proceso de modelización. Entre ellos destacamos a Pollak (1997, pp. 99-100), Blomhøj y Højgaard JENSEN (2003) y Blum Y Lei (2005, p. 1626). El número de pasos o fases varía de un autor a otro pero, en esencia, hay cierto acuerdo al respecto. El proceso, conocido frecuentemente como "Ciclo de modelización" se caracteriza por las importantes relaciones existentes entre las diferentes fases, incluyendo en la última fase una validación del modelo obtenido, lo que redunda en una depuración de dicho modelo que justifica la aparición de "Ciclo" en la forma de describir el proceso de modelización (Ciclo de modelización). Siguiendo a Blum (1991), identificamos las siguientes fases:

1.- *Punto de inicio que coincide con una situación real.* La situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada y hecha más precisa.

2.- *La situación real es matematizada.* Datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones son trasladadas al lenguaje matemático.

3.- *Elección de métodos matemáticos adecuados y trabajo en el seno de las Matemáticas.* A través de este proceso son obtenidos resultados de índole matemática.

4.- *Los resultados son trasladados a la situación real*. Los resultados son re-interpretados en relación con la situación original o el modelo real. En este paso, el modelo matemático obtenido es validado por el autor del modelo.

El problema de investigación

El problema objeto de esta investigación consiste en averiguar la cantidad de fluido contaminante conociendo el área contaminada de un medio acuoso y analizar, mediante un estudio basado en la observación de los procesos y resultados obtenidos, la presencia de obstáculos y dificultades en los alumnos alrededor del concepto o noción de función y de las operaciones entre funciones.

La tarea se plantea a los estudiantes en los siguientes términos:

Se ha producido un vertido de petróleo en el mar. ¿Cómo averiguar la cantidad de petróleo vertido?

Se trata, por lo tanto, de un problema donde intervienen dos magnitudes, área y volumen, dependiente una de la otra, lo que lleva a una relación funcional entre ambas. Se toma como contexto el caso de un vertido medioambiental y se plantea la búsqueda de un modelo matemático que describa un proceso físico. Se pretende llevar a la práctica todas las fases que se ven implicadas en ciertos casos de modelización, donde las matemáticas juegan un papel útil. Los datos se tomarán de forma experimental con la finalidad de obtener una función que ajuste dichos datos. El caso concreto de estudio gira alrededor de la problemática medioambiental generada a partir de un vertido contaminante en el mar.

En el proceso de estudio para conseguir generar un modelo, se harán diferentes simplificaciones como, por ejemplo, suponer que el aceite de uso alimentario tiene un comportamiento parecido al petróleo, aceites o derivados. Se supondrá también que el comportamiento del aceite sobre el agua, a la que se añadió una pequeña cantidad de detergente de uso doméstico, es similar el comportamiento de contaminantes en los que se usaron barreras químicas para concentrar la mancha de producto contaminante y acotar el área contaminada de agua. Se harán otras suposiciones menos exigentes: homogeneidad de la distribución de los contaminantes en el agua en el caso de un vertido, comportamiento similar de los contaminantes al aire libre y en agua salada que en el laboratorio y en agua dulce, etc.

El uso de suposiciones o hipótesis de trabajo como las descritas son comunes en los procesos de modelización. Aunque en el caso que nos ocupa, las hipótesis manejadas resten valor los resultados desde un punto de vista científico, debemos tener en cuenta las finalidades, el ámbito y los medios bajo los que va a ser realizada dicha investigación.

La actividad propuesta se caracteriza como una modelización matemática funcional en la que se llevan a cabo las cuatro fases del ciclo de modelización descrito por Blum (1991). De esa forma, el enunciado del problema planteado en su forma inicial a los alumnos "*Se ha producido un vertido de petróleo en el mar. ¿Cómo averiguar la cantidad de petróleo vertido*", se corresponde con el primer paso (Punto de inicio que coincide con una situación real) e identificable con la contextualización de problema. La toma de datos en el laboratorio o fase experimental fue propuesta a los alumnos de la siguiente forma: "*Vais a verter aceite sobre el agua con una jeringuilla. Tenéis que medir la cantidad de aceite vertida y confeccionar una tabla de datos con la cantidad de aceite y un dato numérico relacionado con la forma de la mancha que se obtiene*" se corresponde con el paso 2 del ciclo de modelización (La situación real es matematizada). En el volcado de datos y la obtención de la función de ajuste se abandona la situación contextualizada para centrarse en el proceso de matematización, que se corresponde con el paso 3 (Elección de métodos matemáticos adecuados y trabajo en el seno de las Matemáticas). La aplicación del modelo a un hipotético caso real representa retomar la situación contextualizada pero ahora de forma que el modelo funcional obtenido permita responder preguntas o cuestiones que la situación real suscita. Se trataría del cuarto paso del ciclo de modelización (Los resultados son trasladados a la situación real). Como ya se ha dicho en la introducción, estas dos últimas fases no se detallan en este trabajo.

Objetivos de la investigación

En cuanto a los objetivos, distinguiremos dos grupos. En el primer grupo describiremos los objetivos de todo el proceso de modelización que se ha implementado con los alumnos como experiencia. En el segundo grupo sólo incluiremos los objetivos de las dos fases o partes de la experimentación de las que se realiza un análisis de resultados.

a) Objetivos generales de la modelización funcional realizada:

1. Identificar qué obstáculos, concepciones y dificultades se presentan en los estudiantes, en el contexto de una actividad de modelización matemática, al tratar uno problema donde intervienen las funciones y sus operaciones.

2. Investigar si las competencias de los estudiantes de 1º de bachillerato son suficientes para aplicar la función obtenida en el modelo en combinación con otros conocimientos, no directamente relacionados con las funciones y sus operaciones, pero necesarios para poder aplicar la función modelizadora en un hipotético caso real.

3. Indagar si la comprensión, por parte de los estudiantes, de las operaciones entre funciones es suficiente para interpretar su significado en un caso real, contextualizado y donde cada operación es realizada para obtener una nueva función que resuelva un problema o cuestión relacionada con la situación modelizada.

4. Encontrar posibles obstáculos y dificultades de origen didáctico o de otro tipo que puedan surgir el verse obligados los estudiantes a hacer operaciones entre funciones y a modificar la forma de la función para poder obtener respuestas a preguntas que surgen en un problema contextualizado y cercano la realidad.

b) Objetivos de las dos fases en las que se realizará un análisis de resultados en el presente artículo:

1. Identificar si a los alumnos se les presenta algún obstáculo o dificultad relacionado con la obtención de datos para confeccionar una tabla de valores relacionada con el problema o situación-origen de la experiencia.

2. Comprobar si la tabla de datos generada conlleva una adecuada identificación de las variables que surgen como variables funcionales.

3. Comprobar el grado de competencia de los alumnos a la hora de escoger una función como la adecuada para realizar el ajuste de los datos de los que disponen.

4. Identificar posibles obstáculos o dificultades de los alumnos al utilizar el ordenador como herramienta que permite trabajar con funciones dependientes de parámetros con gran facilidad.

5. Detectar si los estudiantes identifican adecuadamente las variables funcionales dependiente e independiente y el parámetro en la función obtenida.

Metodología

El problema fue planteado a ocho estudiantes de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología (cuatro hombres y cuatro mujeres), que fueron distribuidos en dos grupos de trabajo de cuatro alumnos cada uno. Parte del trabajo fue realizado por los alumnos fuera de su horario lectivo, aunque la mayoría se llevó a cabo durante las clases lectivas en la asignatura de Matemáticas I, en la que todos los alumnos estaban matriculados. El Centro donde se llevo a cabo la experiencia pertenece a un núcleo de población urbano de tamaño medio, con un fuerte vínculo con el ambiente rural y marinero.

La actividad se encuadra en la enseñanza de una materia específica y con una metodología de trabajo también específica. Proponer a los alumnos actividades de este tipo sólo puede tener éxito en el momento en que el trabajo diario tiene algún tipo de conexión con la actividad propuesta. En estas clases de matemáticas, el debate y la reflexión en grupo es práctica habitual. Se pretende que el alumno sea partícipe de su proceso de aprendizaje de forma que el protagonismo recaiga, en parte, en los propios alumnos, inmersos en comunidades de aprendizaje donde aprendan de las reflexiones y aportaciones de sus compañeros, actuando el profesor como un guía o tutor. La pregunta es, por lo tanto, la base metodológica convirtiéndose en génesis o motor de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En ese contexto, la realización de la actividad es una más, prolongada en el tiempo y más compleja, pero acorde con lo que realizan día tras día en la clase. Es una actividad relacionada con el estudio de las funciones (concepto de función, las operaciones entre funciones, las gráficas y características principales de las funciones fundamentales) tema con el que estuvieron trabajando anteriormente en el curso. En el momento de realizar dicha actividad los alumnos acababan de estudiar la definición de derivada y su interpretación geométrica. Además, también habían trabajado con el GeoGebra para la representación de puntos en los ejes cartesianos, para la representación gráfica de funciones (dependientes de un parámetro o no) y para el ajuste de puntos representados en los ejes mediante una función afín y mediante una función cuadrática.

De esta forma, en el momento de realizar la actividad han estudiado las concepciones CE1, CE3, CE4 y CE5 descritas por Ruiz Higueras (1998) a las que ya nos hemos referido en una sección anterior.

En cuanto a los significados institucionales a los que hacen referencia Godino *et al.* (2006), los estudiantes se habían familiarizado, aunque sólo de forma parcial, con las significados tabular, gráfico y analítico al haber trabajado con tablas de valores asociadas a funciones, estudiado la representación gráfica de funciones y diversas cuestiones asociadas a la expresión analítica de una función, fundamentalmente en relación a las propiedades de las funciones.

La recogida de información sobre los procesos llevados a cabo por los estudiantes y su posterior análisis se basa en la observación in situ del trabajo realizado por los estudiantes, individualmente y en grupo. Para ello, se ha grabado todo el proceso en audio y vídeo con el objetivo de detectar posibles dificultades de comprensión, errores y obstáculos asociados a la resolución del problema planteado.

Fases de la experimentación

Bajo el título "Estudio del crecimiento de una mancha de aceite sobre agua" el problema a estudiar es el crecimiento de una mancha de aceite de uso doméstico en un recipiente con agua, a medida que aumenta su volumen. El aceite tiene una densidad menor que el agua. Sí mezclamos estos dos líquidos en un recipiente, el aceite, por ser menos denso, se sitúa en la parte superior y el agua, que es más densa, se sitúa en la parte inferior del recipiente. Gracias a esta propiedad, las gotas de aceite agregadas en el agua flotan y forman una mancha visible y mensurable.

La experimentación se realizó mediante una actividad dividida en cuatro fases: la recogida de datos en el laboratorio del Centro; representación gráfica de los datos con la ayuda de un ordenador, análisis de los datos obtenidos, cuestionario alrededor de la función obtenida y aplicación en un hipotético caso real. La actividad propuesta se caracteriza como una modelización matemática funcional en la que se llevan a cabo las cuatro fases del ciclo de modelización descrito por Blum (1991).

Para obtener la tabla de datos, realizar el volcado de datos en el ordenador y buscar la función de ajuste, los alumnos fueron divididos en dos grupos de trabajo (Grupos A y B). Cada uno de los grupos estaba formado por cuatro alumnos. Cada uno de los grupos disponía de un ordenador para realizar su trabajo y la actividad realizada en cada ordenador fue grabada en video y audio. Las transcripciones que figurarán en adelante siguen la norma usual de transcripción. Como forma de facilitar la lectura, hemos traducido al castellano las partes en que los alumnos usaron el idioma gallego.

Para facilitar la identificación de la función adecuada, se les suministró, en copia impresa, la expresión analítica de las funciones fundamentales acompañada de sus respectivas gráficas (afín, cuadrática, proporcionalidad inversa, raíz cuadrada, exponencial, logarítmica, seno, coseno y tangente)).

A continuación se describen las dos primeras fases, objeto de análisis en este documento.

1ª Fase. Toma de datos de forma experimental. Confección de una tabla de datos

Previamente a la realización de esta parte de la actividad, se les describió a los alumnos qué iban a hacer y se les preguntó su parecer sobre la mejor forma de verter aceite en un recipiente y de medir la mancha resultante. Los estudiantes llegaron a la conclusión de que lo mejor sería usar una jeringuilla para verter el aceite y una regla para medir al diámetro. Se les indicó que el proceso de verter el aceite en el agua requería de una cierta experiencia previa y que, por lo menos, uno de los miembros del grupo de trabajo debería practicar en su casa (antes de la realización de la actividad). También se les indicó que deberían pensar cuántos datos iban a recoger para hacer su estudio y de qué magnitud. Utilizando una jeringuilla vertieron aceite de uso doméstico sobre el agua de una cubeta en cantidades prefijadas por los propios alumnos en los instantes previos a realizar cada vertido de aceite. Observaron que el vertido del aceite debería hacerse en el centro de la cubeta para evitar que el aceite acumulado chocara con el borde. Previamente al vertido del aceite agregaron una pequeña cantidad de detergente líquido al agua para concentrar el aceite y lograr que la mancha conserve su forma durante más tiempo. Se les indicó que este mismo proceso de añadir detergentes a las manchas contaminantes era conocido como “barreras químicas” y que es un método usado, a veces, en los vertidos contaminantes con el mismo fin con que ellos lo usaron. Con una regla graduada en milímetros midieron el diámetro de la mancha de aceite (que adopta forma circular) y confeccionaron una tabla de datos (Tabla 1).

GRUPO A		GRUPO B	
Aceite vertido (ml)	Diámetro (cm)	Aceite vertido (ml)	Diámetro (cm)
0.2	1.1	2	4.4
0.4	1.7	3	5
0.6	1.9	4	5.4
0.8	2.05	5	5.7
1	2.2	6	5.9
1.2	2.5	7	6.3
1.4	2.7	8	6.7
1.6	3	9	7.6
1.8	3.15	10	8
2	3.5	11	8.5
2.2	3.6	12	9.1
2.4	3.75		
2.6	3.9		
2.8	4		
3	4.1		
4	4.7		
5	5.3		
6	5.7		
8	6.6		

Tabla 1. Datos obtenidos por los grupos A y B

2ª Fase. Volcado de los datos en un sistema de coordenadas cartesianas. Construcción del modelo matemático

En esta segunda parte, la actividad se centra en encontrar una curva de ajuste, identificable con una función concreta, que aproxime los datos obtenidos previamente de forma experimental. En vez de usar un método más aconsejable desde el punto de vista de un matemático experto (método de mínimos cuadrados, como por ejemplo), se usa el programa de geometría dinámica GeoGebra, que permite trabajar con facilidad con funciones dependientes de parámetros.

En primer lugar, los estudiantes proceden el volcado de los datos obtenidos experimentalmente en el laboratorio y que generan una tabla de valores donde una de las variables (volumen en ml) jugará el papel de variable independiente y la otra variable el papel de variable dependiente (diámetro en mm). Los pares de valores se pueden representar cómo puntos aislados en los ejes cartesianos. En las Figura 1 y Figura 2 se puede ver el volcado de datos de cada uno de los grupos.

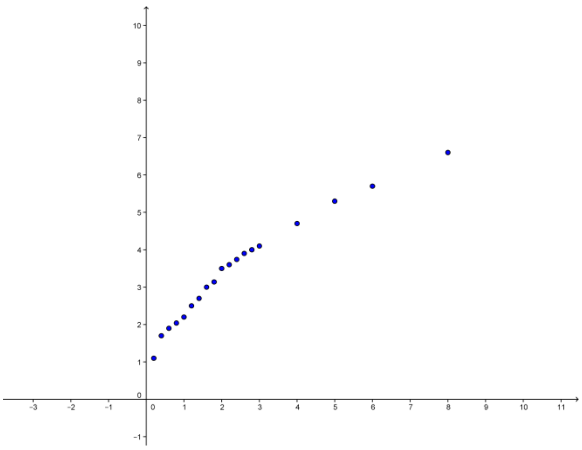

Figura 1. Volcado de datos del grupo A

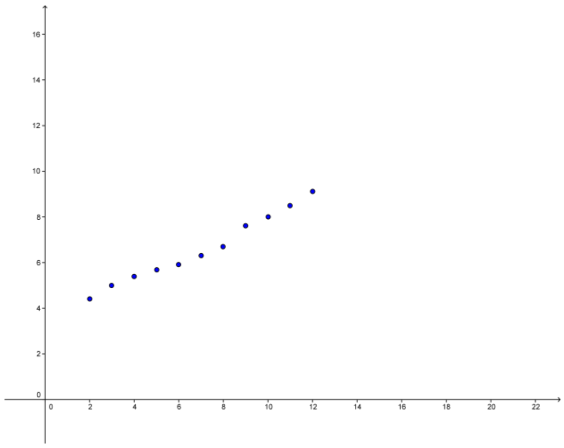

Figura 2. Volcado de datos del grupo B

A la vista de la forma que adoptan los puntos, los alumnos deben identificar qué tipo de función puede ajustar los datos y encontrar la forma concreta de la función para su conjunto de datos, algo que ya hicieron en prácticas previas. Así mismo, estos alumnos están familiarizados con el programa de geometría dinámica GeoGebra para representar pares de puntos en los ejes y la representación grafica de las funciones fundamentales y para trabajar con una función dependiente de un parámetro.

La función modelizadora adecuada es la rama positiva de la raíz cuadrada y será de la forma *f(x)*= $k \cdot \sqrt{x}$, donde *k* es una constante mayor que cero y que será diferente en cada caso, con lo que representa la presencia de una variable en su uso como parámetro.

Las gráficas obtenidas por los dos grupos de estudiantes son las siguientes:

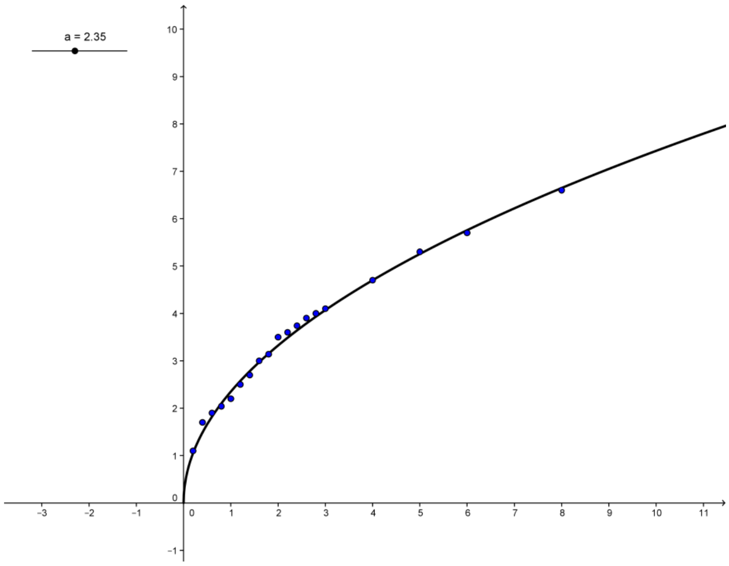

Figura 3. Función obtenida por el grupo A ($2.35 \cdot \sqrt{x}$)

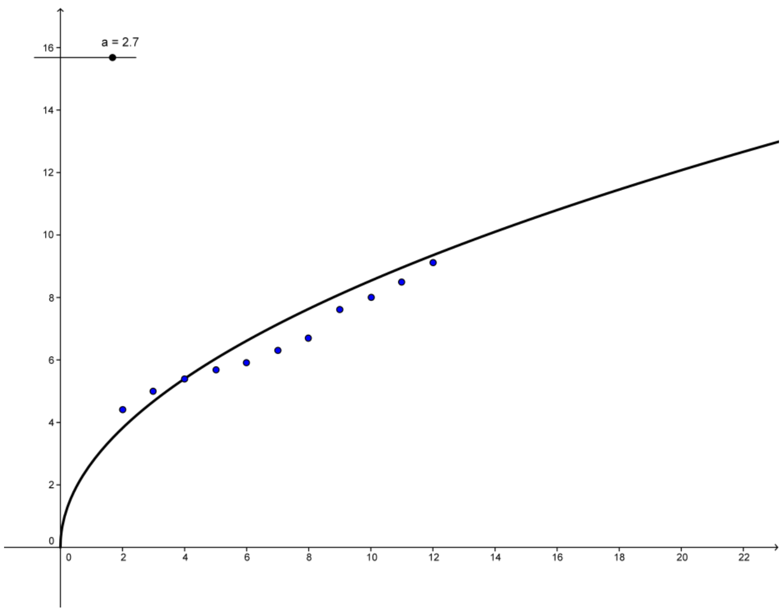

Figura 4. Función obtenida por el grupo B ($f(x) = 2.7 \cdot \sqrt{x}$)

Análisis de resultados

La primera parte de la actividad no presenta dificultades para estos alumnos. La única dificultad encontrada consiste en verter el aceite adecuadamente sobre el agua, algo que se consigue con un poco de práctica. La toma de datos les resultó bastante sencilla.

En la Tabla 1 se observa que los datos recogidos en cada uno de los grupos presentan importantes diferencias que, necesariamente, tendrán su reflejo al intentar usarlos para obtener una función de ajuste apropiada. El grupo A recoge 19 pares de datos frente los 11 del grupo B. Por otro lado, los datos del grupo A van desde los 0.2 ml (menor cantidad de ml marcada en la jeringuilla) hasta los 8 ml mientras que los del grupo B van de 2 a 12 ml. Eso traerá como consecuencia que los puntos marcados sobre los ejes cartesianos del grupo A, además de ser más numerosos, representen una descripción mayor de lo que ocurre en un intervalo relativamente pequeño de la variable independiente, lo que se traducirá en una mayor representación de puntos aislados de la gráfica en ese intervalo y, sobre todo, que proporcione más información sobre la gráfica de la función que podría ajustar el conjunto de datos. Como se verá, eso redundará en una mayor facilidad para determinarla función apropiada. Quizá la razón de que los integrantes del grupo B usen ese tipo de datos venga motivada porque cuando representan funciones afines y cuadráticas usan tablas de valores donde la variable independiente toma usualmente los valores de los primeros números enteros y naturales.

La introducción de los datos en el ordenador no representó para los estudiantes dificultades de ningún tipo. Las únicas dudas que surgen se deben a la introducción errónea de alguno dato por parte de alguno de los integrantes del grupo.

La curva que se intuye en los datos del grupo A lleva a pensar en una curva siempre creciente, mientras que en el grupo B, como se verá, lleva a interpretaciones más amplias.

Respecto a la determinación de la función que podría ajustar los datos, los alumnos comienzan diciendo que se trata de la raíz cuadrada en ambos grupos pero sus compañeros dudan de su afirmación. En el grupo B salen a relucir las dificultades motivadas por la forma de los puntos que tienen en su tabla de valores y toma importancia el hecho de que dispongan de tan pocos puntos. Llegan a comparar su número de puntos con el de sus compañeros del grupo A. Además, intentan que la gráfica que buscan se ajuste plenamente a una cantidad importante de los puntos de los que disponen. La siguiente transcripción intenta mostrar este hecho:

[*El profesor escribe en la pizarra la forma de introducir la raíz cuadrada. Los alumnos del grupo A ya habían decidido que era la función apropiada. Los alumnos del grupo B no prestan atención la este hecho*]

39. Basilio: Es que este no puede ser. Puede ser esto. (…) Es que es un (…)

40. Bruno: ¡Bah! ¡Yo que sé! Yo la dejaba así.

41. Basilio: Sí, ¿no? Que coja los tres puntos, hombre. […] Que coja estos [*Señala en la pantalla una zona concreta*].

42. Braulio: Tenemos un problema profe.

43. Basilio: (…) ¿Qué puede pasar?

44. Bruno: ¡*Mimá*!, mira cuántos tienen entre ellas. [*Señala la pantalla del ordenador del grupo A*]

45. Profesor: ¿Qué?

46. Braulio: No nos cuadra *[Refiriéndose a que no consiguen una función que ajuste los datos*].

47. Basilio: Cuadran tres puntos sólo.

A la hora de introducir el parámetro, surge entonces la confusión entre variable independiente y parámetro y las dificultades con la noción de parámetro. La siguiente situación descrita se produce al intentar recordarles a los estudiantes cómo se introduce un parámetro en el programa GeoGebra, usando en la pizarra la función *f(x)=ax* como ejemplo.

Se presenta ahora la transcripción del debate sobre el proceso llevado a cabo por uno de los dos grupos de estudiantes, que intentaban buscar la función que aproxima la solución del problema.

3. Profesor: (…) Y si fuera una recta sería *ax* más *b*. Dos parámetros. […]. Para poner esa [*los alumnos escribieron en un papel la raíz cuadrada cómo función*], ¿cuántos parámetros lleva?

4. Bruno: *f* de *x*, *k*.

5. Braulio. Uno, dos. Uno, *x* solo.

6. Profesor: Bueno, pues […] Parámetros, Braulio, parámetros.

7. Braulio: ¿La *a* es el valor?

8. Profesor: La *a* es el parámetro. La *x* es la variable.

9. Braulio: ¿Entonces qué ponemos? *x* igual a […]

10. Profesor: *f* de *x* igual a.....

Se constata, en el segmento de la entrevista previo, la dificultad de estos estudiantes para reconocer los parámetros en las expresiones de funciones proporcionadas.

El profesor les da algunas indicaciones de cómo modificar el parámetro. Sigue un pequeño debate sobre cómo ajustar la gráfica haciendo coincidir puntos con la gráfica. Surgen propuestas de posibles funciones ante la dificultad de encontrar la función apropiada y vuelven a mencionar que sus compañeros del grupo A disponen de más puntos, lo que les facilita el trabajo. Desechan la función logarítmica como posibilidad basándose en que los puntos de su tabla de datos son todos de ordenada positiva mientras que la función logarítmica toma valores negativos. No parecen tener en cuenta que los valores negativos del logaritmo de base mayor que 1, que se encuentra en las fotocopias de las gráficas de las funciones que se les entregaron, se producen en el intervalo (0,1) y su tabla de valores comprende los valores naturales de intervalo [2,12].

49. Basilio: Mira, ¿y si hacemos la inversa?
50. Bruno: Si, y un pino.
51. Basilio: (…) Coincide más. Probamos con valores negativos.
52. Bruno: ¡Puff! pues no hay otra.
53. Basilio: Bueno, el seno.
58. Basilio: O con la tangente. No tiene…
59. Bruno: ¿Y si probamos con la logarítmica?
60. Basilio: Fue la que dije yo. Con esta. Pero no tienes valores negativos.

Los alumnos no parecen percatarse de que la gráfica de la función logarítmica que observan en las fotocopias que se les suministraron ($f(x)=log_a(x)$) puede ser modificada cambiando el argumento del logaritmo e introduciendo un parámetro. De esa forma, el intervalo de dominio de definición pasaría a ser $(0,+\infty)$ con lo que la grafica se parecería más a la distribución de puntos que observan (Figura 5).

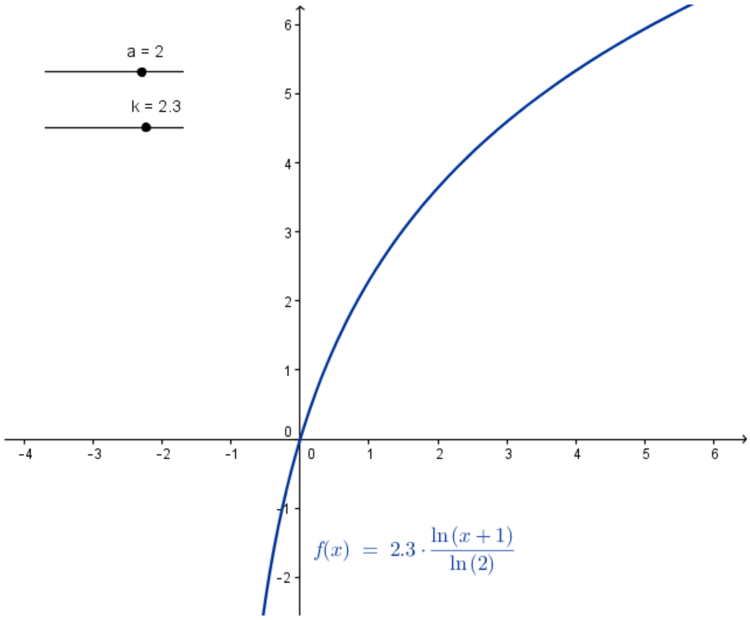

Figura 5. Modificación de la función

$f(x)=log_a(x)$ a $f(x)=k \cdot log_a(x+1)$ $(f(x)=2.3 \cdot log_2(x+1))$

Así, la función logarítmica pasaría a ser considerada como una posibilidad y probablemente habrían intentado ajustar los puntos mediante una logarítmica. Los alumnos parecen reducir las posibilidades de las funciones de las fotocopias a su utilización en su forma "pura", sin introducción de variaciones en la misma. Esto lleva a pensar que no contemplan la posibilidad del uso de funciones resultado de operaciones entre funciones presentes en las fotocopias que se les entregó. Así mismo, es probable que si en las fotocopias de las funciones y gráficas se hubiese optado por escribir la función raíz cuadrada como $f(x)=+\sqrt{x}$ en vez de $f(x)=k \cdot \sqrt{x}$ los alumnos no hubiesen introducido el parámetro *k* en la expresión, escribiendo la función tal y como aparecía en las fotocopias que se el entregaron.

Al no conseguir la función, acuden al profesor como facilitador de respuestas:

65. Braulio: ¡Profe! Una pregunta. […] Profe. ¿Es esta?

Poco después hablan en bajo y lo que dicen es inaudible. Pero sí es audible la conversación de los estudiantes del grupo A, que mencionan que se trata de la raíz cuadrada. Poco después obtienen la función:

78. Basilio: Raíz de *x*.

79. Bruno: ¡Haz lo de la raíz!

Como explicación a sus dificultades para encontrar la función de ajuste, un alumno menciona que sus valores son grandes y, en cambio, los obtenidos por el grupo A son pequeños.

84. Basilio: Sí. Sí porque tenemos valores más grandes, ellos más pequeños

En el proceso de descontextualización que se produce en la segunda fase, aparecen nociones asociadas al concepto de función. Algunas de ellas, como parámetro, familia de funciones o variable dependiente e independiente. Se pretende, en esta parte de la actividad, además de presentar a los alumnos la fase de descontextualización en un proceso de matematización aplicada a la modelización de datos obtenidos por ellos mismos en la primera fase, profundizar y clarificar conceptos y nociones que en sus estudios anteriores han manejado pero de forma superficial y descontextualizada.

Si bien en la evolución histórica del concepto de función no se pasó realmente de la representación gráfica de un conjunto discreto de datos a una curva que ajustara dichos datos y que se correspondiera con una función expresable algebraicamente, la actividad representa el comienzo de la matematización del problema y, en cierta medida, intenta reproducir la evolución histórica de paso de una tabla de valores a su representación gráfica en los ejes cartesianos como curva (configuraciones tabular, gráfica y analítica).

Conclusiones

En este trabajo se han tratado las concepciones tabular (obtención de la tabla de valores), gráfica (volcado de los datos de la tabla de valores y obtención de la función de ajuste) y analítica (expresión analítica de la función modelizadora) descritas por GODINO et al. (2006) y cuatro de las siete concepciones (CE1, CE3, CE4 y CE5) sugeridas por RUIZ Higueras (1998) para el concepto de función.

Por otra parte, no se observan ninguno de los obstáculos histórico-epistemológicos identificados por Ruiz Higueras (1998). Sin embargo, los estudiantes tienen dificultades con la noción de parámetro. No distinguen bien la diferencia entre parámetro y variable independiente en una función. De esa forma, cabe esperar que no comprendan bien el significado de la noción “familia de funciones” ni la forma en que usualmente se les presenta una función en su forma general ($f(x)=ax+b$ en el caso de una recta, por ejemplo). Aparece, por tanto, una dificultad, que podría representar un obstáculo didáctico ligado a una noción paramatemática (CHEVALLARD, 1991, p. 74).

Los estudiantes intentan reproducir esquemas de trabajo exitosos en el pasado, una de las características de los obstáculos (BROUSSEAU, 1983, p. 173-174). Para ellos, la gráfica buscada debe ajustarse a los puntos de su tabla de valores plenamente, de forma que la gráfica pase por todos los puntos. Esto puede representar un obstáculo de origen didáctico (BROUSSEAU, 1983, p. 177) motivado por la forma de introducir la representación gráfica de funciones en la ESO, basada en la generación de una tabla de valores a partir de la expresión analítica de la función (la gráfica ajusta plenamente los puntos visibles en el plano, pues se trata de puntos obtenidos a partir de la función). El deducir la función a partir de la tabla de datos representa un cambio sustancial que parece haber tenido cierta influencia en el comportamiento de los alumnos. Una forma de evitar ese obstáculo y completar su formación es incorporar actividades con curvas de ajuste a puntos aislados y de forma que la función no pase por todos los puntos por no resultar posible esa opción.

La toma de datos influye poderosamente en la interpretación de los mismos por los estudiantes. Uno de los grupos siguió las normas a las que están acostumbrados al representar funciones mediante una tabla de valores, tomando los primeros valores naturales. Eso puede representar un nuevo obstáculo de origen didáctico en su trabajo posterior para encontrar la función de ajuste, hecho del que ellos mismos fueron conscientes en el desarrollo del trabajo. La labor resultó más sencilla para el otro grupo simplemente porque sus datos facilitaron sus conclusiones.

Por último, el ordenador es una poderosa herramienta para el trabajo con funciones dependientes de parámetros y, por consiguiente, para la realización de actividades del tipo de la aquí descrita. Su valor hay que situarlo en el contexto de un útil y no de un medio en sí mismo (ARTIGUE, 1991, p. 197). Los estudiantes participantes ya habían trabajado con funciones dependientes de parámetros al estudiar las gráficas de las funciones fundamentales, pero es evidente que no comprendieron bien su significado. En el momento de usar parámetros con anterioridad, estudiando funciones con GeoGebra, no se presentó de forma visible ningún tipo de dificultad que sí ha aparecido el tener que aplicar sus conocimientos a un problema contextualizado y consistente en la generación de un modelo matemático. El hecho de no ser capaces de utilizar conocimientos adquiridos previamente en un caso diferente de la práctica habitual de la clase puede representar un nuevo obstáculo didáctico, esta vez ligado al uso del ordenador (ARTIGUE, 1995, p. 99). Solo al tener que usar un parámetro en una función para construir un modelo, su significado se convierte en un aprendizaje significativo. Únicamente en una actividad contextualizada su valor queda patente.

A la vista del proceso y los resultados, puede decirse que el uso de la modelización matemática cómo actividad didáctica no es sólo aconsejable sino necesaria. La actividad puede calificarse cómo exitosa si nos referimos al grado de interés y participación demostrado por los estudiantes. Cada una de las actividades resultó interesante, en mayor o menor grado, para los estudiantes de forma que, dependiendo del estudiante, le pareció más interesante una parte u otra. Así, para algunos estudiantes resultó atractiva la parte de recogida de datos, para otros el debate sobre la función y sus operaciones o la aplicación del modelo. Llama la atención que a ningún alumno le pareció interesante el trabajo con el ordenador, elemento considerado motivador por muchos profesores. Se trata, por tanto, de una actividad donde cada parte juega un papel de importancia y que cubre diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria, desde una visión más práctica a una más teórica.

Referencia

ARTIGUE, M. Analysis. En D. TALL (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 167-199.

______. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. GOMEZ (Ed.) **Ingeniería didáctica en educación matemática**. Mexico: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995, p. 97-140.

BACHELARD, G. **La Formación del espíritu científico**. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. 3 ed. Buenos Aires: Siglo XXI (Versión original 1938). 1974.

BIELHER, R. Reconstruction of meaning as didactical task: the concept of function as an example. En JEREMY KILPATRICK, CELIA HOYLES Y OLE SKOVSMOSE (Eds). **Meaning in mathematics education.** New York: Springer, 2005, p. 61-82.

BLUM, W. Applications and modelling in mathematics teaching. A review of rrguments and instructional aspects. En M. NISS, W. BLUM, I. HUNTLEY (Eds.). **Teaching of mathematical modelling and applications**. Chichester: E. Horwood Limited, 1991, p. 10-29.

BLOMHøJ, M. Y HøJGAARD JENSEN T. Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. **Teaching mathematics and its applications,** 22 (3), 2003, p. 123-139.

BLUM, W. & LEI□, D. "Filling Up " – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. **Comunicación en el CERME4 2005, WG 13 Modelling and Applications.** 2005.

BROUSSEAU, G. Problèmes de l'enseignement des décimaux. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 1(1), p. 11-59. 1980.

______. Problèmes de didactique des décimaux. **Recherches en didactique des Mathématiques**, 2 (3), 198, p. 37-127.

______. Les obstacles epistemologique et les problémes en Mathématiques. **Recherches en didactique des Mathématiques**, 4 (2), 1983, p. 165-198.

______. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En **N.** BEDNARZ y **C.** GARNIER (Eds.), **Construction des savoirs**. Obstacles et conflits, Quebec : Agence d'ARC, 1989, p. 41-63.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.

______..; BOSCH, M. GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas**. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: Horsori, 1997.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite**: conceptions et obstacles. 1983. Tesis doctoral. Grenoble: Université I de Grenoble.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Eds), **The concept of function**: Aspects of epistemology and pedagogy. Washington: Mathematical Association of America, 1992.

GODINO, J.D.; BENCOMO, D.; FONT, V. y WILHELMI, M.R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, 27 (2), 2006, p. 221-252. <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf.>

GODINO, J. D.; BATANERO, C. y FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, 39 (1-2), 2007, p. 127-135.

OCDE (2009); PISA 2009. Assessment framework key competencies in reading, mathematics and science. (http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf).

POLLAK, H. O. Mathematical modeling and discrete mathematics. JOSEPH G. ROSENSTEI, DEBORAH S. FRANZBLA, FRED S. ROBERTS (Eds). **Discrete Mathematics in the Schools (Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science)** (36), p. 99-104. American Mathematical Society, 1997.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator** 3 (2), 1992, p. 3-8.

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, **por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria**. BOE del 5 de Enero de 2007.

REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, **por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas**. BOE del 6 de Noviembre de 2007.

RENÉ DE COTRE, S. **Etude historique de la notion de fonction**: Analyse epistemologique et experimentation didactique. 1985. Memorie de Maitrise en Mathématiques. Montreal : Université du quebec.

RUIZ HIGUERAS, L. **Concepciones de os alumnos de secundaria sobre la noción de función**: análisis epistemológico y didáctico. 1993. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

RUIZ HIGUERAS, L. **La noción de función**: análisis epistemológico y didáctico. Jaen: Universidad de Jaen, 1998.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. En G. HAREL y E. DUBINSKY (Eds.), **The concept of function**. Aspects of Epistemology and pedagogy. Washington: Mathematical Association of America, 1992, p. 23-58.

Sobre los autores

José Antonio Cajaraville Pegito: Doctor en Matemáticas por la Universiadad de Santiago de Compostela. Profesor "ad honorem" de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Santiago de Compostela. Línea de investigación: pensamiento numérico avanzado.

Teresa Fernández Blanco: Doctora en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela. Profesora titular de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Santiago de Compostela. Docente en el programa de estimulación del talento matemático (ESTALMAT-Galicia). Líneas de investigación: formación del profesorado, visualización y razonamiento espacial.

José Benito Búa Ares: Profesor de Enseñanza Secundaria en el IES Ramón Cabanillas de Cambados (Galicia -España). Doctorando en Didáctica de la Matemática del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, en la Universidad de Santiago de Compostela.